

【解答】

(1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	6	5	5	4	5	1	5	－	2	5	3
(2)	12	13	14	15	16						
	－	3	2	2	2						

【解説】

(1)

 $2x - y = k$ (k は実数) とおくと

$$2x - y = k$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - k \quad \dots\dots ①$$

となり, これと $5x^2 + y^2 = 4$ を連立して y を消去すると

$$5x^2 + (2x - k)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0 \quad \dots\dots ②$$

となる。よって, この判別式を D とすると, この 2 次方程式が実数解のための k のとり得る値の範囲は,

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2k)^2 - 9(k^2 - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 \leq \frac{36}{5}$$

$$\therefore -\frac{6\sqrt{5}}{5} \leq k \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

であるから, $2x - y = k$ の最大値は $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ である。また, このとき, ②より

$$9x^2 - 4 \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5}x + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4\sqrt{5}}{15}\right)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

であり, これを①に代入すると

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{15} - \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{-2\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(2)

点 P の座標を (x, y) とおくと, $AP:BP=1:2$ より, $2AP=BP$ である。ここで, この両辺を 2 乗すると

$$4AP^2 = BP^2$$

$$\Leftrightarrow 4\{(x+1)^2 + (y-a)^2\} = (x-b)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (2b+8)x + 3y^2 - 8ay + 4a^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b+4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + 2b + 1) \quad \dots\dots ③$$

となる。よって, 条件を満たす任意の点 P は円③上にあり, 逆に円③上の任意の点は条件を満たす。したがって, 円③の中心が $(-2, -4)$ となるとき

$$-\frac{b+4}{3} = -2$$

$$\therefore b = 2$$

$$\frac{4}{3}a = -4$$

$$\therefore a = -3$$

であり, このとき

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}\{(-3)^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 + 1\} &= 8 \\ &= (2\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

となるから, 円③の半径は $2\sqrt{2}$ である。

Ⅱ

【解答】

(1)	17	18	19			
	5	1	8			
(2)	20	21	22	23	24	
	3	5	2	1	6	
(3)	25	26	27			
	4	8	1			
(4)	28	29	30	31	32	33
	7	2	1	7	2	9

【解説】

(1)

すべての球の取り出し方は ${}_9C_2$ 通り存在し、これらは同様に確からしい。また、取り出した2個の球が青球2個である事象をA、赤球2個である事象をB、青球1個と赤球1個である事象をC、青球1個と白球1個である事象をD、赤球1個と白球1個である事象をEとする。すると、1回目の操作後にPが2にある確率はAが起こる確率であるから、

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{5}{18}$$

である。

(2)

2回目の操作後にPが2にありQが-1にある確率はAとEがそれぞれ1回、またはCとDがそれぞれ1回起こる確率であるから、

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} \cdot \frac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_9C_2} \cdot 2 + \frac{{}_5C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_2} \cdot \frac{{}_5C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_9C_2} \cdot 2 = \frac{35}{216}$$

である。

(3)

PとQの距離は、その時点までの操作で取り出した青球と赤球の個数の和に等しい。よって、2回目の操作後にPとQの距離がちょうど2である確率は、Dが2回、またはEが2回、またはDとEがそれぞれ1回起こる確率であるから、

$$\left(\frac{{}_5C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_9C_2} \right)^2 + \left(\frac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_9C_2} \right)^2 + \frac{{}_5C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_9C_2} \cdot \frac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_9C_2} \cdot 2 = \frac{4}{81}$$

である。

(4)

余事象を用いて考える。(3)と同様に考えると、3回目の操作後にPとQの距離が3以下である確率は、3回の操作すべてにおいてDまたはEが起こる確率であるから、(3)より、

$$\frac{4}{81} \cdot \left(\frac{{}_5C_1}{{}_9C_2} + \frac{{}_3C_1}{{}_9C_2} \right) = \frac{8}{729}$$

である。よって、3回目の操作後にPとQの距離が4以上である確率は

$$1 - \frac{8}{729} = \frac{721}{729}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	34	35	36	37	38	39
	8	7	3	2	3	1
(2)	40	41				
	0	6				
(3)	42	43				
	2	5				
(4)	44	45				
	－	1				

〔解説〕

(1)

$$f_1(x) = 2x + 1 \text{ より}$$

$$f_2(x) = 2(2x + 1) + 1 \\ = 4x + 3$$

$$f_3(x) = 2(4x + 3) + 1 \\ = 8x + 7$$

$$f_4(x) = 2(8x + 7) + 1 \\ = 16x + 15$$

$$f_5(x) = 2(16x + 15) + 1 \\ = 32x + 31$$

となる。

(2)

$$f_{n+1}(x) = a(a_n x + b_n) + b \\ = a \cdot a_n x + a \cdot b_n + b$$

より、 $a_{n+1} = a \cdot a_n$, $b_{n+1} = a \cdot b_n + b$ である。よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公比 a の等比数列であるから

$$a_n = a \cdot a^{n-1} \\ = a^n$$

である。また、 $a \neq 1$ のとき

$$b_{n+1} = a \cdot b_n + b \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a \left(b_n - \frac{b}{1-a} \right)$$

より、数列 $\left\{ b_n - \frac{b}{1-a} \right\}$ は初項 $b - \frac{b}{1-a}$ 、公比 a の等比数列であるから

$$b_n - \frac{b}{1-a} = \left(b - \frac{b}{1-a} \right) a^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n = -\frac{b}{1-a} a^n + \frac{b}{1-a}$$

である。以上より、 $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{3}{1-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{1-\frac{1}{2}} \right\} = 6$$

となる。

(3)

(2)より、 $a = 3$, $b = 5$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{-\frac{5}{1-3} 3^n + \frac{5}{1-3}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{5}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}} \\ = \frac{2}{5}$$

となる。

(4)

$$f_2(x) = a(ax + b) + b \\ = a^2 x + ab + b \\ f_3(x) = a(a^2 x + ab + b) + b \\ = a^3 x + a^2 b + ab + b$$

より

$$f(0) = f_3(0) \\ \Leftrightarrow b = a^2 b + ab + b \\ \Leftrightarrow ab(a+1) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、

$$f(0) \neq f_2(0) \\ \Leftrightarrow b \neq ab + b \\ \Leftrightarrow ab \neq 0$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より $a = -1$ となる。

Ⅳ

〔解答〕

(1)	46	47	48	49			
	3	6	6	2			
(2)	50	51	52	53	54	55	56
	7	2	7	2	1	2	2
(3)	57	58	59	60	61	62	
	9	4	3	3	6	2	

〔解説〕

(1)

関数 $y = f(x)$ において,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \frac{6}{x-1} \\ &= \frac{(x+2)(x-3)}{x-1} \end{aligned}$$

より, $x > 1$ における $y = f(x)$ の増減表は次表のようになる。

x	(1)	...	3	...
$f'(x)$	↗	-	0	+
$f(x)$	↗	↘	$6 - 6\log 2$	↗

よって, 関数 $y = f(x)$ は, $x = 3$ のとき最小値 $6 - 6\log 2$ をとる。

(2)

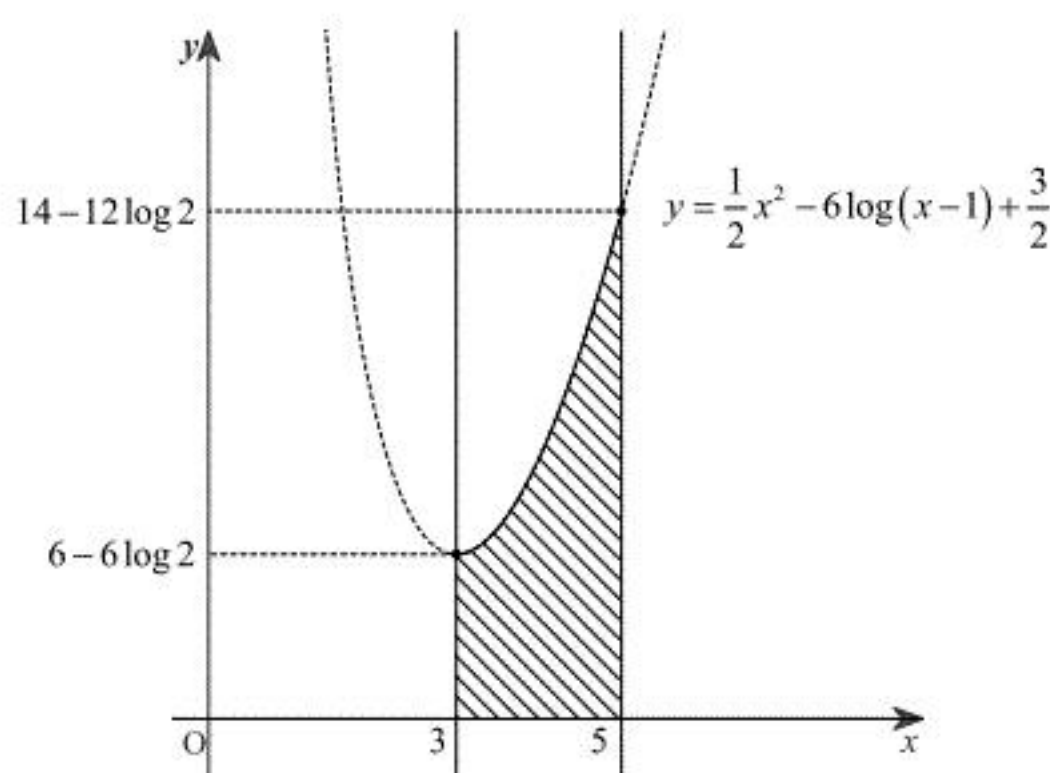
(1)より, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(5, f(5))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(5) &= f'(5)(x - 5) \\ \Leftrightarrow y - \left\{ \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 6\log(5-1) + \frac{3}{2} \right\} &= \frac{(5+2)(5-3)}{5-1}(x-5) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{7}{2}x - \frac{7}{2} - 12\log 2 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$6 - 6\log 2 = 6(1 - \log 2) > 0$ ($\because e > 2$) に注意すると, (1)より, 曲線 $y = f(x)$, 直線 $x = 3$, $x = 5$ および x 軸で囲まれた部分は次図の斜線部分である。



よって, 求める面積は

$$\int_3^5 \left\{ \frac{1}{2}x^2 - 6\log(x-1) + \frac{3}{2} \right\} dx$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} &\int_3^5 \left\{ \frac{1}{2}x^2 - 6\log(x-1) + \frac{3}{2} \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - 6\{(x-1)\log(x-1) - (x-1)\} + \frac{3}{2}x \right]_3^5 \\ &= \frac{1}{6}(5^3 - 3^3) - 6\{(5-1)\log(5-1) - (5-1)\} + 6\{(3-1)\log(3-1) - (3-1)\} + \frac{3}{2}(5-3) \\ &= \frac{94}{3} - 36\log 2 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	63	64	65	66				
	4	3	—	6				
(2)	67	68	69	70				
	1	3	2	3				
(3)	71	72	73	74	75	76	77	78
	4	3	2	2	0	3	6	3

【解説】

(1)

$f(x)$ は $x = \frac{\pi}{3}$ で連続であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}+0} f(x) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}+0} (a \sin x + b) &= 2 - 4 \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} a + b &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、 $f(x)$ が $x = \frac{\pi}{3}$ で微分可能であるから

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a \sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) + b - 0}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{2 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - 0}{h} \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a\left(\frac{1}{2} \sin h + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos h\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} a}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{2 - 4\left(\frac{1}{2} \cos h - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h\right)}{h} \quad \left(\because b = -\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sin h}{h} - \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h}\right) &= \lim_{h \rightarrow +0} \left(2 \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin h}{h}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} a &= 2\sqrt{3} \\ \therefore a &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。よって、これを①に代入すると

$$\begin{aligned}b &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} \\ &= -6\end{aligned}$$

となる。

(2)

[1] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき

(1)より、

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 4 \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

である。

[2] $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$ のとき

[1]と同様にすると、

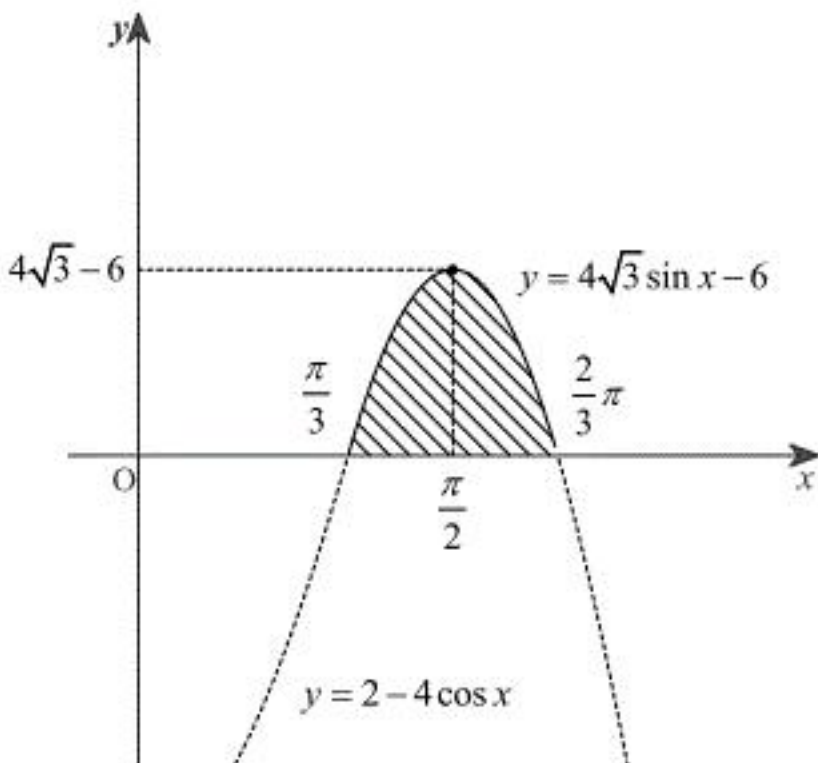
$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow a \sin x + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{3} \sin x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore x &= \frac{2}{3}\pi \quad \left(\because \frac{\pi}{3} < x \leq \pi\right)\end{aligned}$$

である。

以上、[1]、[2]より、 $f(x) = 0$ となるのは、 $x = \frac{\pi}{3}$ および $x = \frac{2}{3}\pi$ のときである。

(3)

曲線 $y = f(x)$ の $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ の部分と x 軸で囲まれた図形 D は次図の斜線部分である。



よって、 D の面積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (4\sqrt{3} \sin x - 6) dx &= \left[-4\sqrt{3} \cos x - 6x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= 4\sqrt{3} - 2\pi\end{aligned}$$

となる。また、 D を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積は

$$\begin{aligned}\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (4\sqrt{3} \sin x - 6)^2 dx &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (48 \sin^2 x - 48\sqrt{3} \sin x + 36) dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \{24(1 - \cos 2x) - 48\sqrt{3} \sin x + 36\} dx \\ &= \pi \left[60x - 12 \sin 2x + 48\sqrt{3} \cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= 20\pi^2 - 36\sqrt{3}\pi\end{aligned}$$

となる。