

【解答】

(1)	ア
	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
(2)	イ
	$1 - \frac{2n+3}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
(3)	ウ
	$1 - \frac{2n^2+7n+9}{36} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

【解説】

(1)

出る目の積が偶数となるのは、少なくとも1つ偶数の目が出るときである。これは「 n 個の目すべてが奇数である」ことの余事象であるため、その確率は

$$1 - \left(\frac{3}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。

(2)

出る目の積が4の倍数とならないのは、

[1] 出る目すべてが奇数であるとき

[2] 2または6の目が1回だけ出て、残りはすべて奇数の目が出るとき

のいずれかで、これらは排反である。

[1]の確率は、(1)と同様に考えて $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。また、[2]の確率は、

$${}_nC_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

以上より、出る目の積が4の倍数となる確率は、これらの余事象の確率を考えて、

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{2n+3}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

(3)

出る目の積が8の倍数とならないのは、

[1] 出る目すべてが奇数であるとき

[2] 2または6の目が1回だけ出て、残りはすべて奇数の目が出るとき

[3] 4が1回だけ出て、残りはすべて奇数の目が出るとき

[4] 2または6の目が2回だけ出て、残りはすべて奇数の目が出るとき

のいずれかで、これらは排反である。

[1], [2]の確率は(2)での議論より、それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 、 $\frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。[3]の確率は、

$${}_nC_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であり、[4]の確率は、

$${}_nC_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{18} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

である。

以上より、出る目の積が8の倍数となる確率は、これらの余事象の確率を考えて、

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{18} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 1 - \frac{2n^2+7n+9}{36} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

である。

【解答】

エ	オ	カ
-3	3	$x^2 - 2x + 1$

【解説】

$P(x)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると、

$$P(x) = f(x)Q(x) + x^2 - x \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。この両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^2 &= \{f(x)Q(x)\}^2 + 2f(x)Q(x)(x^2 - x) + (x^2 - x)^2 \\ \Leftrightarrow \{P(x)\}^2 &= f(x) \left[f(x)\{Q(x)\}^2 + 2Q(x)(x^2 - x) \right] + x^4 - 2x^3 + x^2 \end{aligned}$$

となるから、 $\{P(x)\}^2$ を $f(x)$ で割った余りは、 $x^4 - 2x^3 + x^2$ を $f(x)$ で割った余りと等しい。

$x^4 - 2x^3 + x^2$ を $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ で割った余りを考えると、

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + x^2 \\ = (x^3 + ax^2 + bx - 1)(x - a - 2) + (a^2 + 2a - b + 1)x^2 + (ab + 2b + 1)x - a - 2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり、定数項が1となる条件を考えて、 $-a - 2 = 1$ 、すなわち $a = -3$ となる。

また、①の両辺を3乗すると、

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^3 &= \{f(x)Q(x)\}^3 + 3\{f(x)Q(x)\}^2(x^2 - x) + 3f(x)Q(x)(x^2 - x)^2 + (x^2 - x)^3 \\ \Leftrightarrow \{P(x)\}^3 &= f(x) \left[\{f(x)\}^2 \{Q(x)\}^3 + 3f(x)\{Q(x)\}^2(x^2 - x) + 3Q(x)(x^2 - x)^2 \right] + x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 \end{aligned}$$

となるから、 $\{P(x)\}^3$ を $f(x)$ で割った余りは、 $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$ を $f(x)$ で割った余りと等しい。

この余りを考えると、

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = (x^3 - 3x^2 + bx - 1)\{x^3 + (3 - b)x + 9 - 3b\} + (3 - b)(9 - b)x^2 + (3 - b)(1 - 3b)x + 3(3 - b)$$

となり、割り切れる条件は、係数を比較して、

$$\begin{cases} (3 - b)(9 - b) = 0 \\ (3 - b)(1 - 3b) = 0 \\ 3(3 - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3, 9 \\ b = \frac{1}{3}, 3 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3$$

となる。

また、 $\{P(x)\}^2$ を $f(x)$ で割った余りは、②の x^2 , x , 定数の項に $a = -3$, $b = 3$ を代入して、

$$(a^2 + 2a - b + 1)x^2 + (ab + 2b + 1)x - a - 2 = x^2 - 2x + 1$$

となる。

〔解答〕

	キ	ク
(1)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	ケ	
(2)	$\frac{1}{3}$	
	コ	
(3)	$\frac{\sqrt{35}}{8}$	

〔解説〕

1辺の長さが2の正四面体OABCにおいて、

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

である。

(1)

Mは辺OAの中点であるから、 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ となる。また、Nは辺OBを1:3に内分する点で

あるから、 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ である。以上より、

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

となる。

(2)

PはMNを $t:1-t$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON} = \frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{4}\overrightarrow{OB}$$

となり、よって

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = \frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{4}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

である。 $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ であるから、CPとMNが直交する条件は、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{MN} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{4}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t-1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{t}{16}|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{1-2t}{8}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t-1}{4} \cdot 2^2 + \frac{t}{16} \cdot 2^2 + \frac{1-2t}{8} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

CPとMNが直交するとき、 $\triangle CMN$ について、CPはMNを底辺とみたときの高さにあた

る。ここで、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}|^2 &= \left| -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{16}|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot 2^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

より $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で、 $t = \frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{12}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{144}|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + \frac{1}{18}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 2^2 + \frac{1}{144} \cdot 2^2 + 2^2 + \frac{1}{18} \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 2 \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

より $CP = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$ である。以上より、 $\triangle CMN$ の面積は

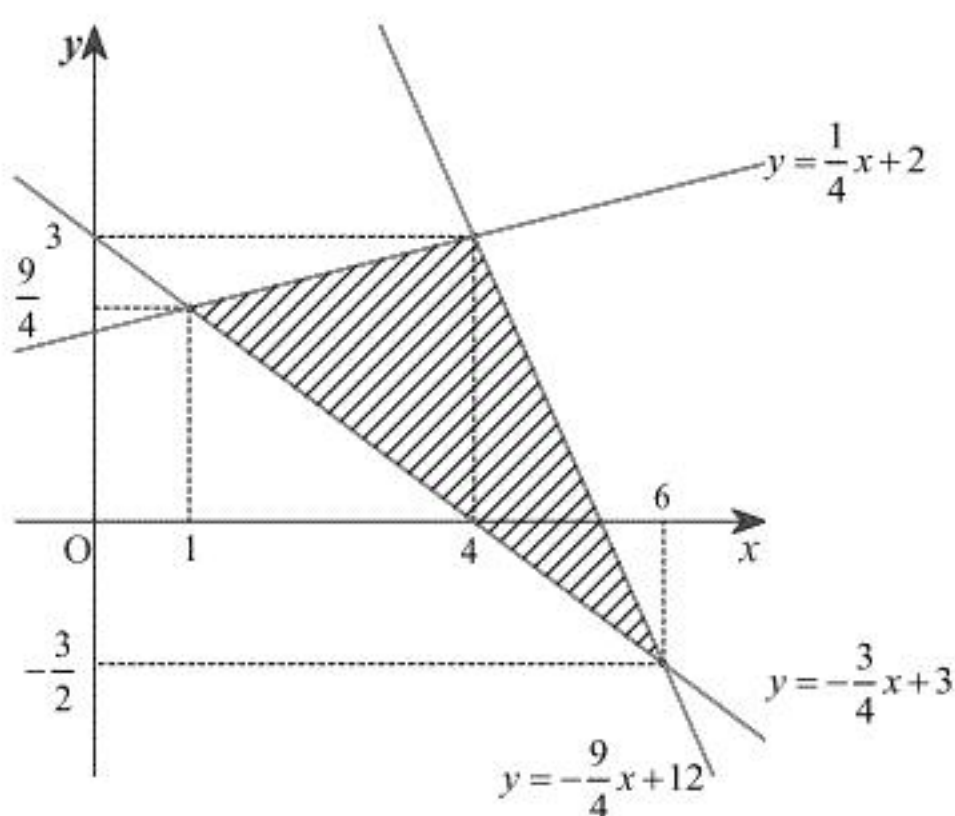
$$\frac{1}{2} \cdot MN \cdot CP = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{8}$$

となる。

(1)

与えられた連立不等式について、

$$\begin{cases} 3x+4y \geq 12 \\ -x+4y \leq 8 \\ 9x+4y \leq 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{3}{4}x+3 \\ y \leq \frac{1}{4}x+2 \\ y \leq -\frac{9}{4}x+12 \end{cases}$$

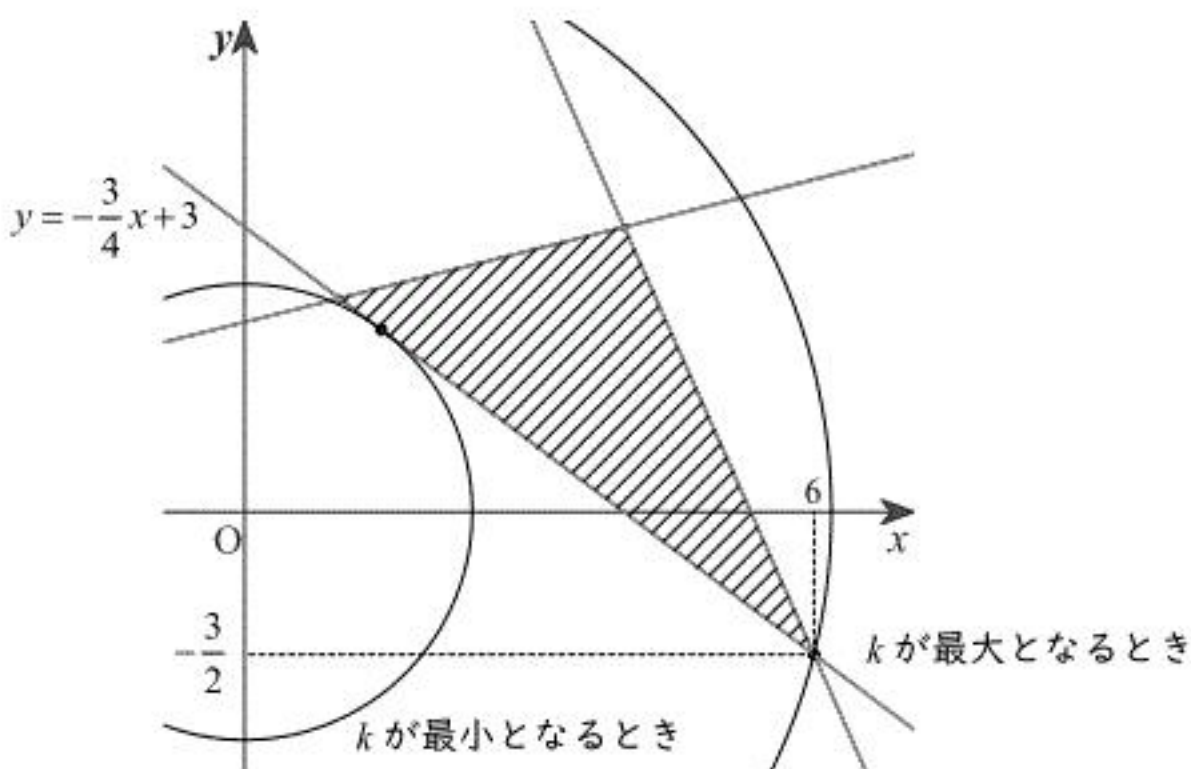
であり、領域 D は以下ようになる。ただし、境界を含む。

(答) 上図

(2)

$$x^2 + y^2 = k \quad (k > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

とおくと、これは xy 平面上で原点中心、半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。①と領域 D が共有点をもつような k の最大値と最小値を考える。



上図より、 k が最大となるのは、①が点 $\left(6, -\frac{3}{2}\right)$ を通るときであり、このとき

$$k = 6^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{153}{4}$$

である。また、 k が最小となるのは、①が直線 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ と接するときである。このときの

①の半径は、原点と直線 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 、すなわち $3x + 4y - 12 = 0$ との距離を考えて、

$$\frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$$

となるから、 $k = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$ である。

(答) 最大値 $\frac{153}{4}$, 最小値 $\frac{144}{25}$

関数 $f(x)$ について,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{8}\right)^x - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} + 5\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)} + 5\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ &= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^3 - 8\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^x \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ とおくと、 $t > 0$ であり、 x が $x \geq 0$ の範囲を動くときは

$0 < t \leq 1$ である。また、 t を用いて $f(x)$ を表した関数を

$$g(t) = t^3 - 8t^2 + 5t$$

とおき、増減を調べればよい。

$$g'(t) = 3t^2 - 16t + 5 = (3t-1)(t-5)$$

より、増減表は以下ようになる。

t	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...	5	...
$g'(t)$		+	0	-		-	0	+
$g(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{22}{27}$	$\searrow$		$\searrow$	-50	$\nearrow$

したがって、関数 $g(t)$ の最小値は -50 であり、このとき

$$t = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 5$$

である。また、 x が $x \geq 0$ の範囲を動くとき、すなわち t が $0 < t \leq 1$ の範囲を動くとき、最大値は $\frac{22}{27}$ である。このとき

$$t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$$

である。

(答) 最小値 -50 ($x = \log_{\frac{1}{2}} 5$ のとき), 最大値 $\frac{22}{27}$ ($x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ のとき)