

【解答】

ア	イ	ウ	エ
$\frac{21}{128}$	$\frac{61}{128}$	$\frac{47}{64}$	$\frac{85}{256}$

【解説】

(1)

Aの得点が0になるのは、サイコロを投げて出た目の数だけの枚数のコインを投げ、全て裏が出るときであるから、その確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{21}{128} \end{aligned}$$

となる。

(2)

A, Bの得点が0, 1, 2となる確率はそれぞれ等しく、これを p_0, p_1, p_2 とおく。(1)より

$p_0 = \frac{21}{128}$ である。得点が1になるのは、サイコロを投げて出た目の数だけの枚数のコインを

投げ、そのうち1枚だけ表が出るときであるから、その確率は

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} + {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{32 + 32 + 24 + 16 + 10 + 6}{2^6} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

となる。Aの得点が2であるとき、Aが勝つのは、Bの得点が0, 1のときであるから、求める確率は

$$p_0 + p_1 = \frac{61}{128}$$

である。

(3)

得点が2になるのは、サイコロを投げて出た目の数だけの枚数のコインを投げ、そのうち2枚だけ表が出るときであるから、その確率は

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{6} \left\{ {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{16 + 24 + 24 + 20 + 15}{2^6} \\ &= \frac{33}{128} \end{aligned}$$

である。Aの得点が3であるとき、Aが勝つのは、Bの得点が0, 1, 2のときであるから、求める確率は

$$p_0 + p_1 + p_2 = \frac{47}{64}$$

である。

(4)

Aが出したサイコロの目が3である確率は $\frac{1}{6}$ である。ここで、Aが出したサイコロの目が

3であり、そのうえAが勝つ確率を求める。この場合 Aが「1点で勝つ」、「2点で勝つ」、「3点で勝つ」の3つの場合がある。

[1] 1点で勝つとき

Aが1点で勝つのは、Aが3枚のコインのうち1枚だけ表を出し、Bの得点が0のときであるから、その確率は

$$\frac{1}{6} \cdot {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{21}{128}$$

である。

[2] 2点で勝つとき

Aが2点で勝つのは、Aが3枚のコインのうち2枚だけ表を出し、Bの得点が0, 1のときであるから、その確率は

$$\frac{1}{6} \cdot {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 (p_0 + p_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{61}{128}$$

である。

[3] 3点で勝つとき

Aが3点で勝つのは、Aが3枚のコインのうち全て表を出し、Bの得点が0, 1, 2のときであるから、その確率は

$$\frac{1}{6} \cdot {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 (p_0 + p_1 + p_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{47}{64}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、Aが出したサイコロの目が3であり、そのうえAが勝つ確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{21}{128} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{61}{128} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{47}{64} = \frac{85}{1536}$$

である。したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{85}{1536}}{\frac{1}{6}} = \frac{85}{256}$$

である。

【解答】

オ	カ	キ	ク	ケ
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	正六	$3\sqrt{3}$

【解説】

(1)

$\overrightarrow{OM} = (0, -1, -1)$, $\overrightarrow{ON} = (1, 0, 1)$ であるから,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{ON}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

となる。

(2)

$\triangle OMN$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2 |\overrightarrow{ON}|^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 2 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。

(3)

平面 OMN と辺 CG の交点を I とおく。点 I は平面 OMN 上の点であるから

$$\overrightarrow{OI} = s\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON} \quad (s, t \text{ は実数})$$

とおくことができる。よって

$$\overrightarrow{OI} = (t, -s, -s-t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、点 I は辺 CG 上の点であるから

$$\overrightarrow{OI} = (1-k)\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OG} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

とおける。よって

$$\overrightarrow{OI} = (1, 1, 2k-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、①、②より各成分を比較して

$$\begin{cases} t=1 \\ -s=1 \\ -s-t=2k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-1 \\ t=1 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。よって、交点 I の座標は $(1, 1, 0)$ である。

(4)

(3)と同様にして、平面 OMN と辺 AE の交点を J とおくと、点 J の座標は $(-1, -1, 0)$ となり、点 I は辺 CG の中点、点 J は辺 AE の中点である。平行な 2つの 平面に1つの平面が交わるとき 交線 は平行になるから、平面 OMN による立方体 $ABCD-EFGH$ の切り口は、点 M, N, I, J と辺 HE の中点と、辺 HG の中点の計6個を頂点とする六角形となる。これらの頂点は全て立方体の辺の中点であるから、この六角形の各辺の長さは等しい。 したがって、 切り口の図形は正六角形である。

(5)

(4)より切り口は正六角形であるから、(2)を用いて、その面積は

$$\begin{aligned} 6\triangle OMN &= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

3

(1)

$l: y = ax + a^2$ が点 $(1, 2)$ を通るとき、

$$2 = a + a^2$$

$$\Leftrightarrow (a+2)(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2, 1$$

となる。

(答) $a = -2, 1$

(2)

$$(x, y) \in D$$

$\Leftrightarrow y = ax + a^2$ を満たす実数 a が存在する。

$\Leftrightarrow a^2 + xa - y = 0$ を満たす実数 a が存在する。・・・①

であるから、 a の二次方程式 $a^2 + xa - y = 0$ の判別式を d とすると、

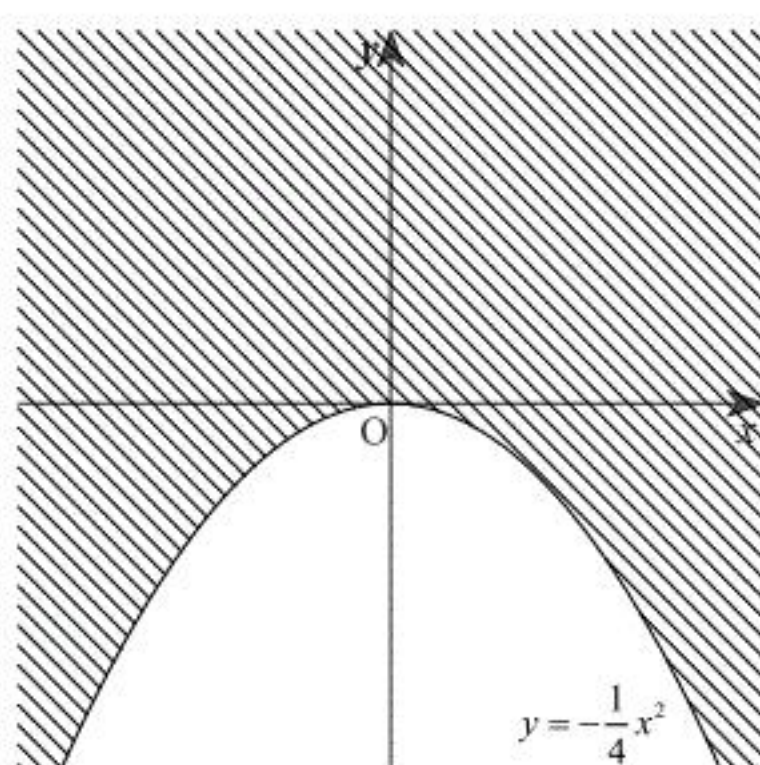
①

$$\Leftrightarrow d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}x^2$$

となるから、 D は下図斜線部である。ただし境界を含む。



(答) 前図

(3)

(2)と同様に考えると、

$$(x, y) \in E$$

$\Leftrightarrow b^2 + 2yb - x = 0$ を満たす実数 b が存在する。

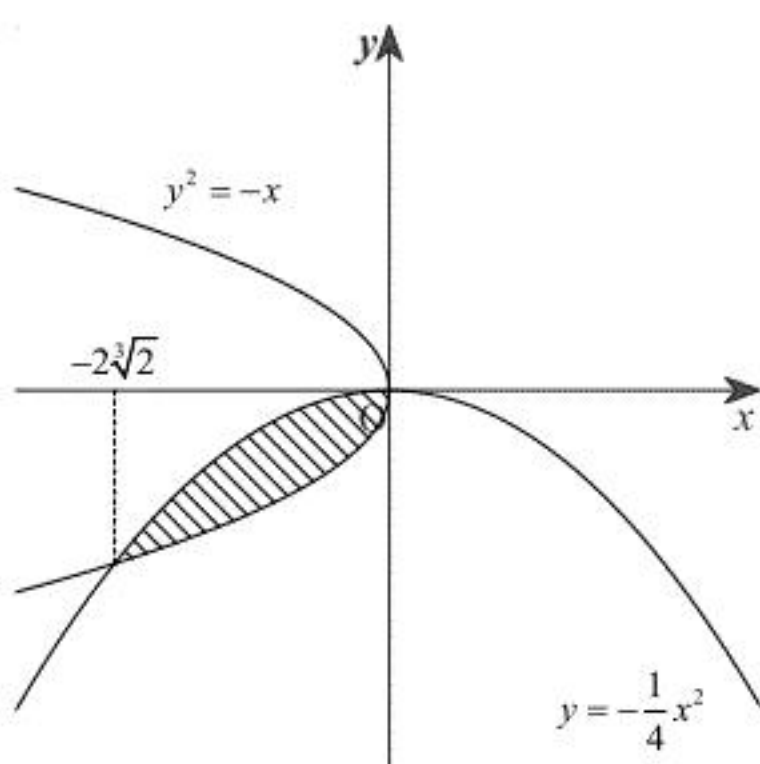
$$\Leftrightarrow y^2 + x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \geq -x$$

となるから、

$$\overline{D} \cap \overline{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < -\frac{1}{4}x^2 \text{ かつ } y^2 < -x \right\}$$

であるため、 $\overline{D} \cap \overline{E}$ は下図斜線部である。ただし境界を含まない。



また、 $y = -\frac{1}{4}x^2$ と $y^2 = -x$ の共有点の x 座標は

$$\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^2 = -x$$

$$\Leftrightarrow x^4 = -16x$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, -2^3/2 \quad (\because x \text{ は実数})$$

であり、 $y^2 = -x$ の $y \leq 0$ の部分は、 $y = -\sqrt{-x}$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2^3/2}^0 \left\{ -\frac{1}{4}x^2 - (-\sqrt{-x}) \right\} dx &= \int_{-2^3/2}^0 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{-x} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^3 - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \right]_{-2^3/2}^0 \\ &= -\frac{1}{12} \cdot 2^4 + \frac{2}{3} \left(2^{4/3} \right)^{3/2} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}$

(1)

点 P は双曲線 C 上で第一象限にあり、 x 座標が t であるため、 y 座標は

$$3y^2 = 5t^2 + 30$$

$$\therefore y = \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10} \quad (\because y > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}$$

(2)

点 P における C の接線 ℓ の傾きを求める。双曲線 C の式 $3y^2 = 5x^2 + 30$ の両辺を x で微分することにより、

$$6y \frac{dy}{dx} = 10x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5x}{3y} \quad (\because y \neq 0)$$

となる。したがって点 $\left(t, \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}\right)$ における接線 ℓ の傾きは $\frac{5t}{3\sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}}$ となる。直線 ℓ は点

$\left(t, \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}\right)$ を通るので、求める方程式は

$$y = \frac{5t}{3\sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}}(x - t) + \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}$$

$$\Leftrightarrow 5tx - \sqrt{15t^2 + 90}y + 30 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad 5tx - \sqrt{15t^2 + 90}y + 30 = 0$$

(3)

点 P における C の法線 m の傾きは、(2) で求めた接線 ℓ の傾きを用いて $-\frac{3\sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}}{5t}$ となる。

直線 m は点 $\left(t, \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}\right)$ を通るので、求める方程式は

$$y = -\frac{3\sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}}{5t}(x - t) + \sqrt{\frac{5}{3}t^2 + 10}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{15t^2 + 90}x + 15ty - 8t\sqrt{15t^2 + 90} = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3\sqrt{15t^2 + 90}x + 15ty - 8t\sqrt{15t^2 + 90} = 0$$

(4)

点 P は第一象限にあるから $t > 0$ より、接線 ℓ と x 軸の交点 Q の座標は

$$5tx + 30 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{t}$$

より Q $\left(-\frac{6}{t}, 0\right)$ である。また、法線 m と x 軸の交点 R の座標は

$$3\sqrt{15t^2 + 90}x - 8t\sqrt{15t^2 + 90} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}t \quad (\because \sqrt{15t^2 + 90} > 0)$$

より R $\left(\frac{8}{3}t, 0\right)$ である。 $t > 0$ より、 $-\frac{6}{t} < \frac{8}{3}t$ であるから、

$$f(t) = \frac{8}{3}t - \left(-\frac{6}{t}\right) = \frac{8}{3}t + \frac{6}{t}$$

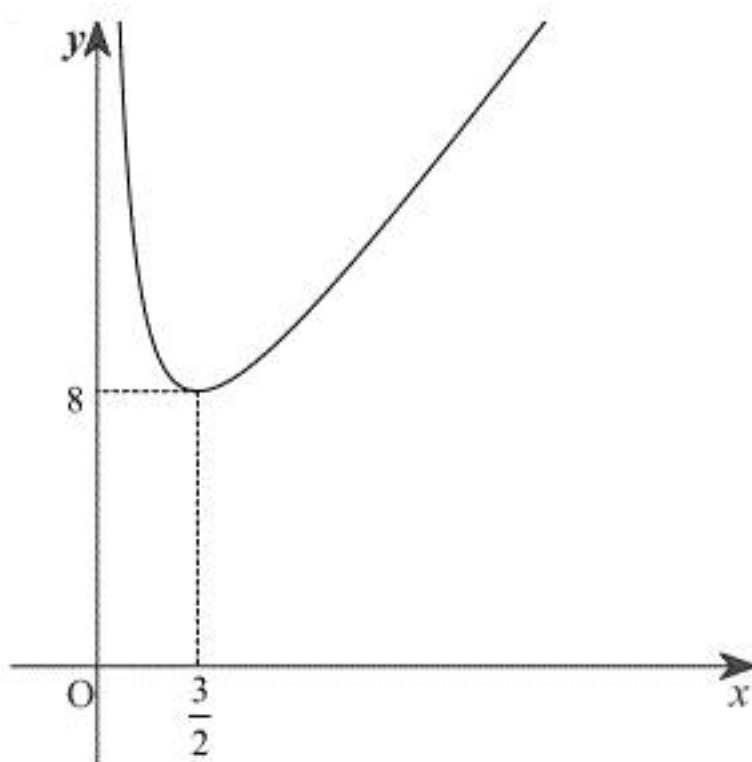
である。

$$f'(t) = \frac{8}{3} - \frac{6}{t^2} = \frac{2(4t^2 - 9)}{3t^2}$$

より $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \quad (\because t > 0)$ であるから $t > 0$ において $f(t)$ の増減表は以下の通りである。

t	0	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

また、 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 8$ 、 $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \infty$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ より関数 $f(t)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(1)

部分積分法より

$$\begin{aligned}
 \int x e^{-x} dx &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\
 &= -x e^{-x} - e^{-x} + C_1 \\
 &= -(x+1)e^{-x} + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -(x+1)e^{-x} + C_1$$

(2)

部分積分法より

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\
 &= -x^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + C_2 \quad (\because (1) \text{ の結果}) \\
 &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_2$$

(3)

部分積分法より

$$\begin{aligned}
 \int x^5 e^{-x} dx &= -x^5 e^{-x} + 5 \int x^4 e^{-x} dx \\
 &= -x^5 e^{-x} - 5x^4 e^{-x} + 20 \int x^3 e^{-x} dx \\
 &= -(x^5 + 5x^4)e^{-x} - 20x^3 e^{-x} + 60 \int x^2 e^{-x} dx \\
 &= -(x^5 + 5x^4 + 20x^3)e^{-x} - 60(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_3 \quad (\because (2) \text{ の結果}) \\
 &= -(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120)e^{-x} + C_3 \quad (C_3 \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120)e^{-x} + C_3$$