

【解答】

(1)	1	2	3	4
	1	1	2	0
(2)	5	6	7	
	1	1	2	
(3)	8	9		
	1	6		
(4)	10	11	12	13
	1	1	3	0

【解説】

(1)

5枚の名札を各人に1枚ずつでたために配る場合の数は、

$$5! = 120$$

より120通りである。5人全員が自分の名札を受け取る場合の数は1通りであることから求

める確率は、 $\frac{1}{120}$ である。

(2)

ちょうど3人が自分の名札を受け取る時、その3人を選ぶ場合の数は

$${}_5C_3 = 10$$

より10通りである。また、その3人をA, B, CとするとD, Eの受け取り方はDがEの名札を受け取りEがDの名札を受け取る時で1通りのみである。3人の選び方と受け取る場合の数は互いに独立であることから求める確率は

$$\frac{10 \cdot 1}{120} = \frac{1}{12}$$

である。

(3)

ちょうど2人が自分の名札を受け取る時、その2人を選ぶ場合の数は

$${}_5C_2 = 10$$

より10通りである。また、その2人をA, BとするとC, D, Eの受け取り方は

$$(C, D, E) \rightarrow (D, E, C), (E, C, D)$$

の2通りである。2人の選び方と受け取る場合の数は互いに独立であることから求める確率は

$$\frac{10 \cdot 2}{120} = \frac{1}{6}$$

である。

(4)

1人だけが自分の名札を受け取る確率を求める。ちょうど1人が自分の名札を受け取る時、その1人を選ぶ場合の数は

$${}_5C_1 = 5$$

より5通りである。また、その1人をAとするとB, C, D, Eの受け取り方は

$$(B, C, D, E) \rightarrow (C, B, E, D), (C, D, E, B), (C, E, B, D), (D, B, E, C), (D, E, B, C), \\ (D, E, C, B), (E, B, C, D), (E, D, B, C), (E, D, C, B)$$

の9通りである。1人の選び方と受け取る場合の数は互いに独立であることから求める確率は

$$\frac{5 \cdot 9}{120} = \frac{3}{8}$$

である。以上のことから自分の名札を受け取る人がいない事象の余事象は自分の名札を受け取る人が少なくとも1人いる事象であることから求める確率は

$$1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120} \right) = 1 - \frac{76}{120} = \frac{11}{30}$$

である。

【解答】

(1)	14	15	16	17	18	19	20	
	—	3	4	1	8	3	3	
(2)	21	22	23	24	25			
	2	3	3	2	9			
(3)	26	27	28	29	30	31	32	33
	—	1	6	3	1	3	8	1

【解説】

(1)

$f(x) = \tan x$ であることから $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ となり、接線の傾きは

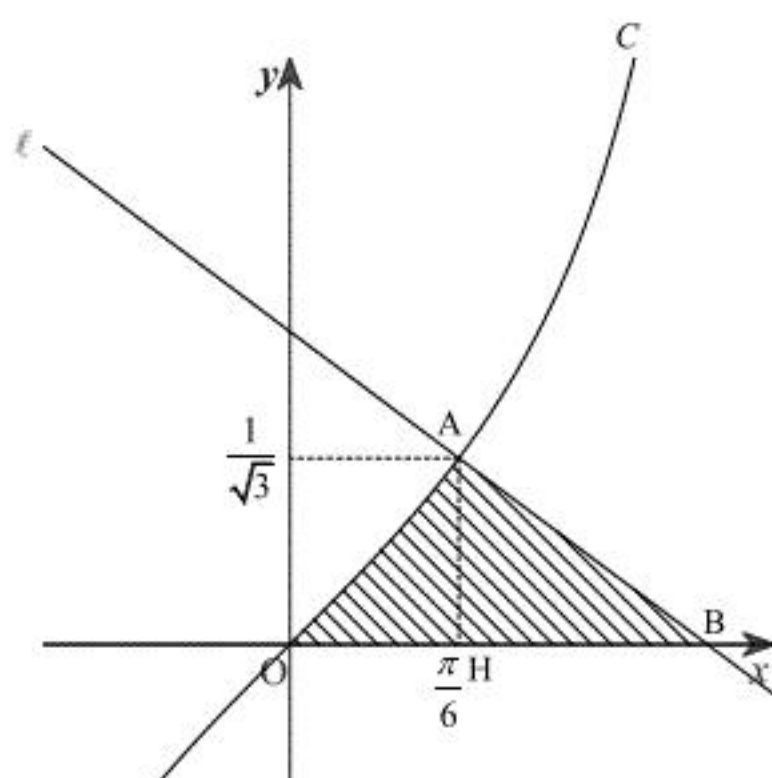
$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求められる。よって、法線の傾きは $-\frac{3}{4}$ であるから、点 $\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ を通る法線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\frac{3}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\pi + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)



上図において、曲線 C と直線 ℓ の交点を A 、 x 軸と直線 ℓ の交点を B 、点 A から x 軸におろした垂線の足を点 H とする。求める面積は上図の斜線部の面積である。ここで、点 B の座標は

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\pi + \frac{\sqrt{3}}{3}$ に $y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\pi + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{6}\pi + \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

と求められる。このことから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, dx + \triangle AHB &= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\left[\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{9} \\ &= \log \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。このことから、 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 、 $b = \frac{2}{9}$ と求められる。

(3)

x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は、 $x \geq \frac{\pi}{6}$ の部分が底面の半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 、高さ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

の円錐になることから

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x)^2 \, dx + \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \, dx + \frac{4\sqrt{3}}{81} \pi \\ &= \pi \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{4\sqrt{3}}{81} \pi \\ &= -\frac{1}{6} \pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{4\sqrt{3}}{81} \pi \\ &= \frac{-1}{6} \pi^2 + \frac{31\sqrt{3}}{81} \pi \end{aligned}$$

と求めることができる。

(1)

2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が異なる2つの実数解を持つ条件は、 $x^2 + px + q = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 4q &> 0 \\ \Leftrightarrow q &< \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

と求められる。このとき、2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解は、

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{aligned}$$

であり、 $\alpha < \beta$ であることから

$$\alpha = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \beta = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

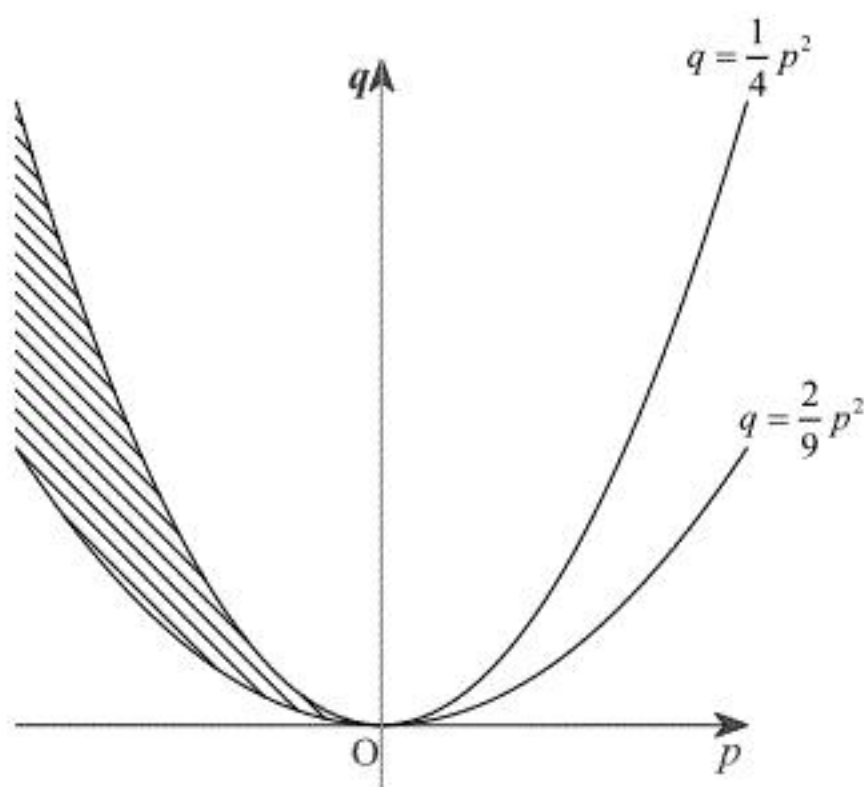
となる。ここで、 $\frac{\alpha}{2} \leq \beta \leq 2\alpha$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{4} &\leq \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \leq -p - \sqrt{p^2 - 4q} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -p - \sqrt{p^2 - 4q} \leq 2 \cdot (-p + \sqrt{p^2 - 4q}) \\ -p + \sqrt{p^2 - 4q} \leq 2 \cdot (-p - \sqrt{p^2 - 4q}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 3\sqrt{p^2 - 4q} \\ 3\sqrt{p^2 - 4q} \leq -p \end{cases} \\ \Leftrightarrow p \leq 3\sqrt{p^2 - 4q} \leq -p \end{aligned}$$

が成り立つ。判別式より $p^2 - 4q > 0$ であることから

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9(p^2 - 4q) \leq p^2 \\ p < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q \geq \frac{2}{9}p^2 \\ p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。以上のことから点 (p, q) の取りうる範囲は、下図の斜線部分である。ただし境界は $q = \frac{1}{4}p^2$ 上の点のみ含まない。



(答) 上図

(2)

2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ に関して解と係数の関係より

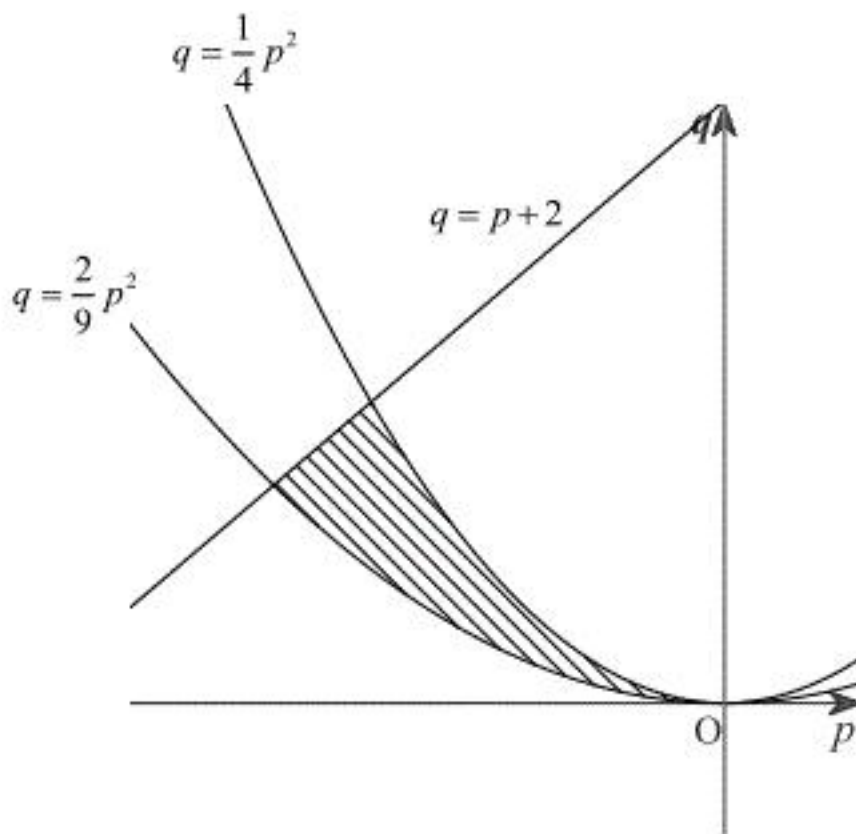
$$\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$$

が成り立つ。このことから、

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)(\beta + 1) &\leq 3 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + (\alpha + \beta) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow q &\leq p + 2 \end{aligned}$$

と求めることができる。以上のことから点 (p, q) の取りうる範囲は、下図の斜線部分である。

ただし境界は $q = \frac{1}{4}p^2$ 上の点のみ含まない。



上図より p の値が最小となるのは、 (p, q) が曲線 $q = \frac{2}{9}p^2$ と直線 $q = p + 2$ の交点の座標のうち p の値が小さい方となるときである。

$$\begin{aligned} \frac{2}{9}p^2 &= p + 2 \\ \Leftrightarrow 2p^2 - 9p - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - 6)(2p + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{3}{2}, 6 \end{aligned}$$

より、 p の最小値は $p = -\frac{3}{2}$ であり、このとき、 $q = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$ となる。よって、求める (p, q)

の値は $(p, q) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となる。

(答) $(p, q) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(3)

(2)のとき、

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}, 1 \end{aligned}$$

と求められ、 $\alpha < \beta$ であることから $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ と求められる。

(答) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$

(1)

$b_n = a_{n+1} - a_n$ であることから $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$ であり,

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} - 2(a_{n+1} - a_n) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n - 1$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = 2b_n - 1$$

(2)

(1)より, $b_{n+1} = 2b_n - 1$ が成り立つことから

$$b_{n+1} = 2b_n - 1$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$$

と変形できる。このことから数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 $b_1 - 1$ 、公比 2 の等比数列であり,

$$b_n - 1 = (b_1 - 1) \cdot 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow b_n = (b_1 - 1) \cdot 2^{n-1} + 1$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad b_n = (b_1 - 1) \cdot 2^{n-1} + 1$$

(3)

(1)より, $b_n = (b_1 - 1) \cdot 2^{n-1} + 1$ が成り立ち, $b_n = a_{n+1} - a_n$ であることから,

$$\sum_{k=1}^9 b_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{10} - a_9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^9 \{(b_1 - 1) \cdot 2^{k-1} + 1\} = a_{10} - a_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b_1 - 1)(2^9 - 1)}{2 - 1} + 9 = 2$$

$$\Leftrightarrow b_1 - 1 = -\frac{1}{73}$$

$$\Leftrightarrow b_1 = \frac{72}{73}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad b_1 = \frac{72}{73}$$

(4)

(2), (3)より, $b_n = \left(\frac{72}{73} - 1\right) \cdot 2^{n-1} + 1$ であることから,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{73} \cdot 2^{n-1} + 1$$

と書くことができる。このことから, $n \geq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{73} \cdot 2^{k-1} + 1 \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{73} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + n - 1$$

$$= n - \frac{2^{n-1} - 1}{73}$$

と求められ, $n=1$ のとき

$$a_1 = 1 - \frac{2^{1-1} - 1}{73}$$

$$= 1$$

となることから, $n=1$ のときも成立する。以上のことから, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = n - \frac{2^{n-1} - 1}{73}$ と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad a_n = n - \frac{2^{n-1} - 1}{73}$$

(1)

$y = \frac{x}{x^2+1}$ であることから、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} \\ y'' &= \frac{-2x(x^2+1)^2 + (x^2-1) \cdot 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) + 4x(x^2-1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

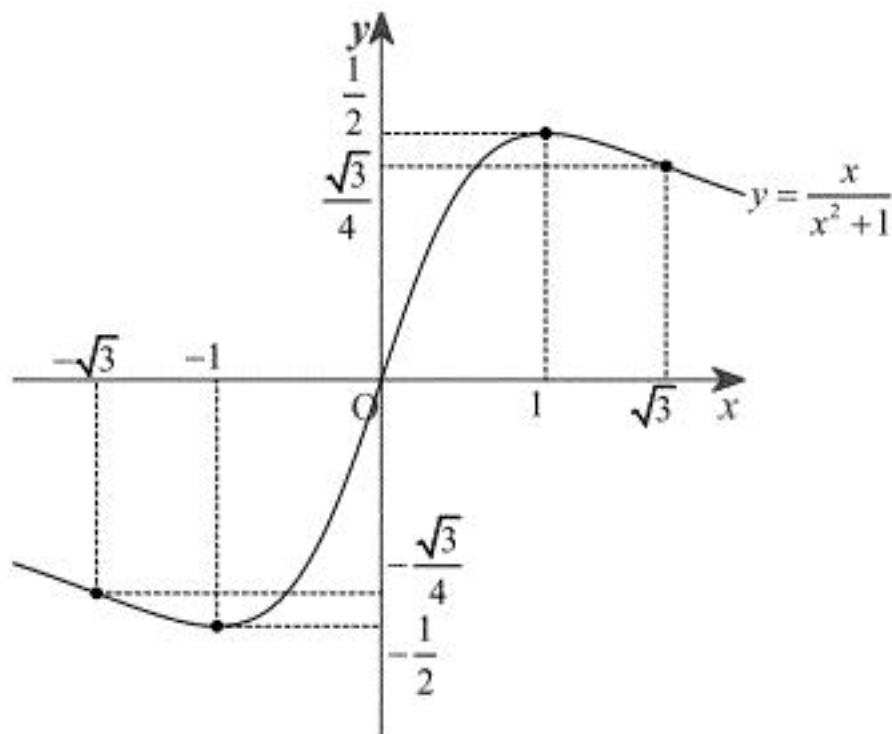
と変形することができる。このことから、 $y' = 0$ のとき $x = \pm 1$ 、 $y'' = 0$ のとき $x = 0, \pm\sqrt{3}$ と求めることができる。以上のことから、増減表は以下のようになる。

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	$\curvearrowright$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\curvearrowleft$	$-\frac{1}{2}$	$\curvearrowright$	0	$\curvearrowleft$	$\frac{1}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\curvearrowleft$

このことから、 $y = \frac{x}{x^2+1}$ の極値は $x = 1$ で極大値 $\frac{1}{2}$ 、 $x = -1$ で極小値 $-\frac{1}{2}$ をとり、変曲点は

$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ である。また、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ であることから

$y = \frac{x}{x^2+1}$ のグラフは以下のようになる。



(答) 上記

(2)

$k > 0$ であることから、(1)のグラフより $k \leq x \leq k+1$ の範囲で $y > 0$ であることがわかる。このことから、求める面積は

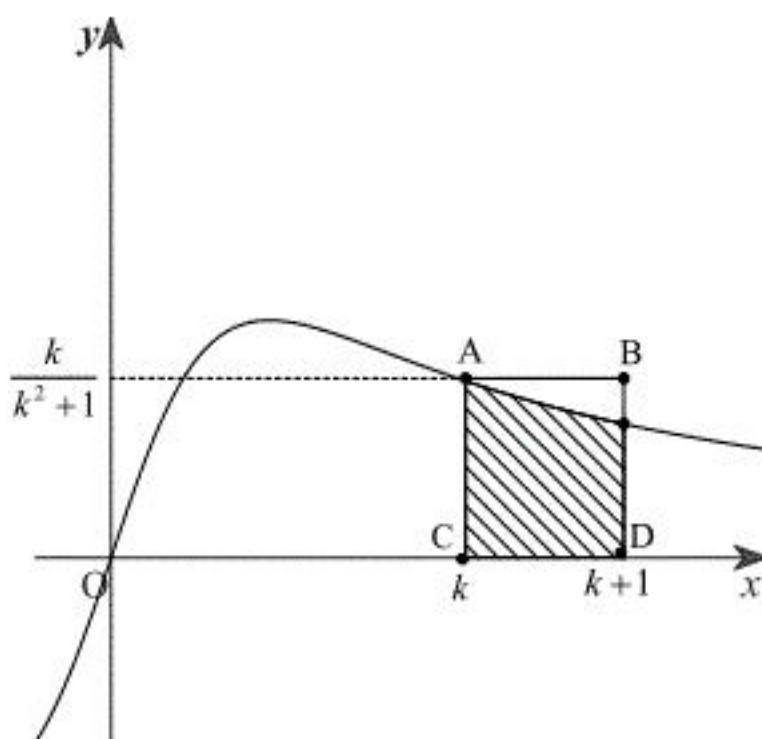
$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log|x^2+1|]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{k^2+2k+2}{k^2+1} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} \log \frac{k^2+2k+2}{k^2+1}$

(3)

下図のように点 A, B, C, D を定める。



k は自然数であることから $k \geq 1$ であり、(1)より $x \geq 1$ のとき $y = \frac{x}{x^2+1}$ は単調減少であること

から、斜線部分の面積は長方形 ABCD の面積より小さい。このことから、

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{x^2+1} dx < \frac{k}{k^2+1}$$

が成り立つ。この両辺を $k=1$ から $k=n$ まで足すことで、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+1} dx &< \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} \\ \Leftrightarrow \int_1^{n+1} \frac{x}{x^2+1} dx &< \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} [\log|x^2+1|]_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{n^2+2n+2}{2} \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{2} \log \frac{n^2+2n+2}{2} < \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1}$$

が成り立つ。ここで

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \log \frac{n^2+2n+2}{2} \right) = +\infty$$

であることから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1}$ は正の無限大に発散する。

(答) 正の無限大に発散する