

【解答】

(1)	1							
	4							
(2)	2	3	4	5	6	7	8	
	－	2	－	1	8	2	1	
(3)	9	10	11	12	13	14	15	16
	2	2	1	1	1	1	1	2

(3)の9～16については問題に不備があるため想定された解答を示しています。

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 &x^3-5x^2+2x+12=0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)(x^2-2x-4)=0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)\{(x-1)^2-5\}=0 \\
 &\therefore x=3, 1\pm\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

である。 $2<\sqrt{5}<3$ より、解の最大値は $1+\sqrt{5}$ であり、 $1+\sqrt{5}$ 以上の整数の中で、最小のものは4である。

(2)1.

$\int_0^1 f(t)dt$ は定数であるから、これを A とおくと、

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 f(t)dt \\
 &= \int_0^1 (-4t^3+2bt+cA)dt \\
 &= \left[-t^4+bt^2+cAt\right]_0^1 \\
 &= cA+b-1 \\
 \therefore (c-1)A &= 1-b \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

が成立する。

$b=6, c=2$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $A=-5$ であり、

$$f(x)=-4x^3+12x-10$$

となる。 $f'(x)=-12x^2+12=-12(x+1)(x-1)$ より、増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘	-18	↗	-2

ゆえに、 $f(x)$ の極大値は -2 、極小値は -18 である。

2.

$c=-1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より

$$-2A=1-b \Leftrightarrow b=2A+1$$

であり、

$$f(1)=-4+2(2A+1)-A=3A-2$$

となる。

$$\begin{aligned}
 &1\leq f(1)\leq 4 \\
 &\Leftrightarrow 1\leq 3A-2\leq 4 \\
 &\Leftrightarrow 1\leq A\leq 2
 \end{aligned}$$

であるから、 $A=\int_0^1 f(t)dt$ の最大値は2、最小値は1である。

(3)

n を奇数とするとき、

$$\begin{aligned}
 S &= 2^2-2r+2^2r^2-2r^3+2^2r^4-2r^5+\cdots+2^2r^{n-1}-2r^n \\
 &= 2(2-r)(1+r^2+r^4+\cdots+r^{n-1})
 \end{aligned}$$

である。

[1] $r=1$ のとき

$$S=2\cdot 1\cdot \frac{n+1}{2}=n+1$$

である。

[2] $r=-1$ のとき

$$S=2\cdot 3\cdot \frac{n+1}{2}=3(n+1)$$

である。

[3] $r^2\neq 1$ のとき

$$S=\frac{2(2-r)(1-r^{n+1})}{1-r^2}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、

$$S=\begin{cases} n+1 & (r=1 \text{ のとき}) \\ 3(n+1) & (r=-1 \text{ のとき}) \\ \frac{2(2-r)(1-r^{n+1})}{1-r^2} & (r^2\neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

※解答には想定解である $r^2\neq 1$ のときの解答を記載しました。

II

【解答】

(1)	17	18	19	20	21	22				
	1	3	2	1	—	1				
(2)	23	24	25	26	27	28				
	b	2	b	3	3	2				
(3)	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
	1	1	2	1	1	2	1	1	4	4

【解説】

(1)

平面 ABC 上の点 H は、 $a+b+c=1$ を満たす実数 a, b, c を用いて

$$\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = (a, 2b, -2c)$$

と表すことができる。点 H は原点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足であるから、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OH}|^2, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OH}|^2, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OH}|^2 \text{ が成立するから、}$$

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = a = 4b = 4c$$

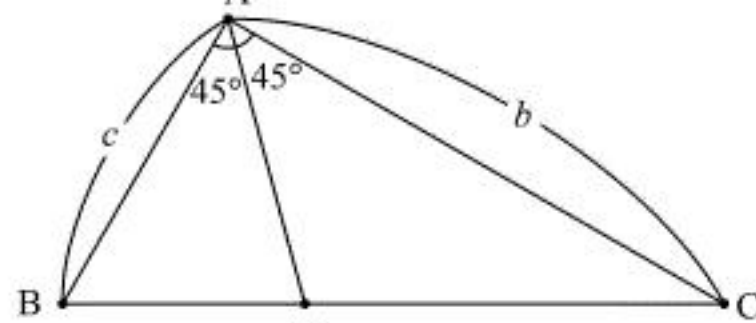
が成立する。よって、ある実数 t を用いて、 $a=4t, b=t, c=t$ と書くことができ、 $a+b+c=1$

に代入することで $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{6}, c=\frac{1}{6}$ を得る。したがって、

$$\overrightarrow{OH} = (a, 2b, -2c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(2, 1, -1)$$

である。

(2)



$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ であるから、

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot c \cdot AD \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot b \cdot AD \cdot \sin 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow bc = \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c) \cdot AD$$

$$\therefore AD = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$$

である。また、 $b+c=3$ のとき $\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の差の二乗は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot AD \cdot \sin 45^\circ - \frac{1}{2} \cdot b \cdot AD \cdot \sin 45^\circ\right)^2 &= \left\{\frac{1}{2}(b-c) \cdot \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{(b+c)^2 - 4bc\right\} \cdot \frac{(bc)^2}{(b+c)^2} \\ &= \frac{1}{36} (9-4bc)(bc)^2 \quad (\because b+c=3) \\ &= \frac{1}{36} \{-4(bc)^3 + 9(bc)^2\} \end{aligned}$$

である。 $bc=x$ とおくと、解と係数の関係より b, c は t の二次方程式 $t^2 - 3t + x = 0$ の正の実数解である。

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 3t + x \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + x - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

とおくと $f(t)=0$ が 2 つの正の実数解をもつ条件は

$$\begin{cases} x - \frac{9}{4} \leq 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{9}{4}$$

である。 $g(x) = -4x^3 + 9x^2$ とおくと、 $g'(x) = -12x^2 + 18x = -12x\left(x - \frac{3}{2}\right)$ より、 $0 < x \leq \frac{9}{4}$ における増減表は以下になる。

x	(0)	...	$\frac{3}{2}$	...	$\frac{9}{4}$
$g'(x)$	(0)	+	0	-	
$g(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	0

したがって、 $x=\frac{3}{2}$ のとき $g(x)$ は最大となり、 $\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の差の二乗も最

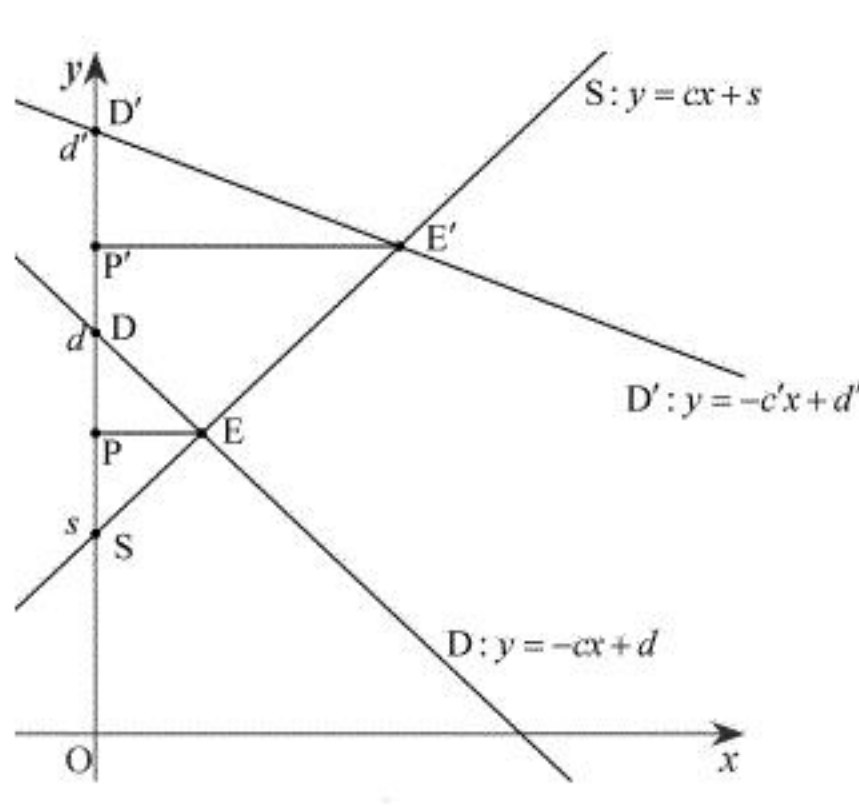
大となる。 b は t の二次方程式 $t^2 - 3t + x = 0$ の解であるから、 $x=\frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} b^2 - 3b + \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{3}{4} \\ \therefore b &= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)1.

問題文の状況を図示すると下図のようになる。



E' の x 座標は、 $y = cx + s$ と $y = -c'x + d'$ から y を消去して、

$$cx + s = -c'x + d'$$

$$\therefore x = \frac{d' - s}{c + c'} \quad (\because c + c' > 0)$$

であり、 y 座標は $y = c \cdot \frac{d' - s}{c + c'} + s = \frac{cd' + c's}{c + c'}$ である。したがって、 $\triangle D'E'P'$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d' - s}{c + c'} \cdot \left(d' - \frac{cd' + c's}{c + c'}\right) &= \frac{(d' - s)^2}{2} \cdot \frac{c'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(d' - s)^2}{2c} \cdot \frac{\frac{c'}{c}}{\left(1 + \frac{c'}{c}\right)^2} \quad (\because c \neq 0) \\ &= \frac{(d' - s)^2}{2c} \cdot \frac{1}{\frac{c'}{c} + 2 + \frac{1}{c'}} \end{aligned}$$

である。 $\frac{c'}{c} > 0$ より、相加平均と相乗平均の大小関係を用いると、

$$\frac{c'}{c} + 2 + \frac{1}{\frac{c'}{c}} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{c'}{c} \cdot \frac{1}{\frac{c'}{c}}} = 4 \text{ となり、}$$

$$\frac{(d' - s)^2}{2c} \cdot \frac{1}{\frac{c'}{c} + 2 + \frac{1}{\frac{c'}{c}}} \leq \frac{(d' - s)^2}{8c}$$

である。ただし、等号成立条件は $\frac{c'}{c} = 1$ である。ゆえに、 $\triangle D'E'P'$ の面積が最大となるのは

$c' = c$ 、点 E' の座標が $\left(\frac{d' - s}{2c}, \frac{d' + s}{2}\right)$ のときである。

2.

$OS:SD:DD' = 1:4:1$ のとき、 $s:d:d' = 1:5:6$ である。 $\triangle D'E'P'$ の面積は

$$\frac{(d' - s)^2}{2c} \cdot \frac{\frac{c'}{c}}{\left(1 + \frac{c'}{c}\right)^2} = \frac{25s^2}{2c} \cdot \frac{\frac{c'}{c}}{\left(1 + \frac{c'}{c}\right)^2} \text{ であり、} \triangle DEP \text{ の面積は、} d' \text{ を } d \text{ に、} c' \text{ を } c \text{ に置き換えた}$$

$$\begin{aligned} \frac{(d - s)^2}{2c} \cdot \frac{\frac{c}{c}}{\left(1 + \frac{c}{c}\right)^2} &= \frac{16s^2}{2c} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{2s^2}{c} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle D'E'P'$ の面積が $\triangle DEP$ の面積以上になるのは、

$$\begin{aligned} \frac{25s^2}{2c} \cdot \frac{\frac{c'}{c}}{\left(1 + \frac{c'}{c}\right)^2} &\geq \frac{2s^2}{c} \\ \Leftrightarrow 25 \cdot \frac{c'}{c} &\geq 4 \left(1 + \frac{c'}{c}\right)^2 \quad (\because s \neq 0, c > 0) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq 4 \left(\frac{c'}{c}\right)^2 - 17 \frac{c'}{c} + 4 \\ \Leftrightarrow 0 &\geq \left(4 \cdot \frac{c'}{c} - 1\right) \left(\frac{c'}{c} - 4\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} &\leq \frac{c'}{c} \leq 4 \\ \therefore \frac{1}{4}c &\leq c' \leq 4c \quad (\because c > 0) \end{aligned}$$

のときである。

III

〔解答〕

(1)	39	40	41	42	43
	1	6	3	1	0
(2)	44				
	7				

〔解説〕

(1)

自然数 n に対し、 $10^n \leq a < 10^{n+1} \Leftrightarrow n \leq \log_{10} a < n+1$ のとき、 a の桁数は $n+1$ である。

$$\log_{10} 5^x = x \log_{10} \frac{10}{2} = x(1 - \log_{10} 2) = 0.6990 \cdot x$$

$$\log_{10} 8^y = y \cdot 3 \log_{10} 2 = 0.9030 \cdot y$$

であるから、 x, y に対応する $5^x, 8^y$ の桁数は下表のようになる。

x または y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
5^x の桁数	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	...
8^y の桁数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	11	12	13	14	15	...

したがって、 5^x と 8^y のそれぞれの桁数を合計すると13桁になるような整数 x と y (ただし、 $x, y > 1$) の組合せは、

$$(x, y) = (2, 12), (3, 11), (3, 10), (4, 11), (4, 10), (5, 9), (6, 8), (7, 8), (8, 7), \\ (9, 6), (10, 6), (11, 5), (12, 4), (13, 3), (14, 3), (15, 2)$$

の16通りである。これらの組合せのうち、 $x+y$ が最小となる組合せは、

$$(x, y) = (3, 10)$$

である。

(2)

$$A = \sin \frac{\pi}{\alpha} \cos \frac{\pi}{\beta} + \cos \frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi}{\beta} = \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} \right) \text{ である。 } 1 \leq \alpha, \beta \leq 6 \text{ より、 } \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} \leq 2\pi \text{ である}$$

から、 A が整数となるのは、 $\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ のときであり、 α と β の組合せは

$$(\alpha, \beta) = (3, 6), (4, 4), (6, 3), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)$$

の7通りである。

IV

(1)

太郎さんが箱 A に金貨を隠しており、花子さんも箱 A を選んでいるため、太郎さんは残りの箱 B と箱 C から $\frac{1}{2}$ の確率でどちらか 1 つを開ける。事象 A' が起きる確率は $\frac{1}{3}$ であるから、求める確率は

$$\begin{aligned}P(A' \cap C_o) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$

(2)

太郎さんが箱 B に金貨を隠しているとき、花子さんは箱 A を選ぶため、太郎さんは箱 C を開ける。よって、

$$\begin{aligned}P(B' \cap C_o) &= P(B') \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。太郎さんが箱 C に金貨を隠しているとき、花子さんは箱 A を選ぶため、太郎さんは箱 B を開ける。よって、 $P(C' \cap C_o) = 0$ である。以上より、手順 3 で太郎さんが箱 C を開ける確率は、

$$\begin{aligned}P(C_o) &= P(A' \cap C_o) + P(B' \cap C_o) + P(C' \cap C_o) \\&= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

(1), (2) の結果より手順 3 で太郎さんが箱 C を開けるととき、手順 1 で箱 A に金貨を隠した条件つき確率は、

$$\begin{aligned}\frac{P(A' \cap C_o)}{P(C_o)} &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(4)

手順 3 で太郎さんが箱 C を開けるととき、手順 1 で箱 B に金貨を隠した条件つき確率は、

$$\begin{aligned}\frac{P(B' \cap C_o)}{P(C_o)} &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。

手順 4 で箱の選択を変更する場合、金貨を隠した箱を花子さんが当てる確率は、 $\frac{2}{3}$ であり、

箱の選択を変更しない場合、金貨を隠した箱を花子さんが当てる確率は、 $\frac{1}{3}$ である。よって、

手順 4 で箱の選択を変更する場合の方が金貨を隠した箱を花子さんが当てる確率が高い。

(答) $\frac{2}{3}$

変更する場合の方が当てる確率が高い。

理由：前述