

問題 I

問 1

$$\begin{aligned}f(p, q, r) &= p^3 - q^3 - 27r^3 - 9pqr \\&= (p-q)^3 + (-3r)^3 - 9pqr + 3pq(p-q) \\&= (p-q-3r)\{(p-q)^2 - (p-q)(-3r) + (-3r)^2\} + 3pq(p-q-3r) \\&= (p-q-3r)\{(p^2 - 2pq + q^2) + 3(rp - qr) + 9r^2 + 3pq\} \\&= (p-q-3r)(p^2 + q^2 + 9r^2 + pq - 3qr + 3rp)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (p-q-3r)(p^2 + q^2 + 9r^2 + pq - 3qr + 3rp)$$

問 2

p, q, r が正の整数のとき $p+q, 3r+p$ も正の整数であるから、

$$\begin{aligned}p^2 + q^2 + 9r^2 + pq - 3qr + 3rp &= \frac{1}{2}(2p^2 + 2q^2 + 18r^2 + 2pq - 6qr + 6rp) \\&= \frac{1}{2}\{(p^2 + 2pq + q^2) + (q^2 - 6qr + 9r^2) + (9r^2 - 6rp + p^2)\} \\&= \frac{1}{2}\{(p+q)^2 + (q-3r)^2 + (3r+p)^2\} \\&> 0\end{aligned}$$

である。したがって、問 1 より

$$\begin{aligned}f(p, q, r) &= 0 \\&\Leftrightarrow p-q-3r=0 \\&\Leftrightarrow p=q+3r\end{aligned}$$

である。このとき、もう 1 つの等式は

$$\begin{aligned}p^2 - 10q - 30r &= 11 \\&\Leftrightarrow p^2 - 10(q+3r) = 11 \\&\Leftrightarrow p^2 - 10p = 11 \\&\Leftrightarrow p^2 - 10p - 11 = 0 \\&\Leftrightarrow (p+1)(p-11) = 0\end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 p は正の整数であるから、 $p=11$ である。また、

$$q+3r=11$$

を満たす正の整数 q, r の組は、

$$(q, r) = (2, 3), (5, 2), (8, 1)$$

である。よって、求める組は

$$(p, q, r) = (11, 2, 3), (11, 5, 2), (11, 8, 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (p, q, r) = (11, 2, 3), (11, 5, 2), (11, 8, 1)$$

問題2

問1

a_n は関数 $f(x)$ が極大値をとる x より、 a_n は $f'(x)=0$ の解であることが必要である。ここで、

$$f'(x)=\sin x+x\cos x$$

である。 $2n\pi\leq x\leq 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ において $\sin x\geq 0$ 、 $x\cos x\geq 0$ かつ $(\sin x, \cos x)\neq(0, 0)$ であるから $f'(x)>0$ である。また、

$$\begin{aligned}f'\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)&=1>0\\f'\left((2n+1)\pi\right)&=-(2n+1)\pi<0\end{aligned}$$

であり、 $f'(x)$ は連続であるから、中間値の定理より $f'(x)=0$ の解は $2n\pi+\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\pi$ の範囲に少なくとも1つある。また、

$$\begin{aligned}f''(x)&=\cos x+\cos x-x\sin x\\&=2\cos x-x\sin x\end{aligned}$$

であり、 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<x\leq(2n+1)\pi$ において $f''(x)<0$ より、この範囲において $f'(x)$ は単調に

減少する。よって、 $f'(x)=0$ の解は $2n\pi+\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\pi$ の範囲に唯1つある。この解を p_n とおく。同様に、 b_n は曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標より、 b_n は

$$\begin{aligned}f''(x)&=0\\&\Leftrightarrow 2\cos x-x\sin x=0\end{aligned}$$

の解であることが必要である。 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<x\leq(2n+1)\pi$ において $\cos x<0$ 、 $x\sin x\geq 0$ より

$f''(x)<0$ である。また、

$$\begin{aligned}f''(2n\pi)&=2>0\\f''\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)&=-2n\pi-\frac{\pi}{2}<0\end{aligned}$$

であり、 $f''(x)$ は連続であるから、中間値の定理より $f''(x)=0$ の解は $2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ の範

囲に少なくとも1つある。また、 $2n\pi\leq x\leq 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ において $x\sin x$ は単調に増加し、 $\cos x$ は

単調に減少するから $f''(x)$ は単調に減少する。よって、 $f''(x)=0$ の解は $2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ の

範囲に唯1つある。この解を q_n とおく。以上より、 $f(x)$ の凹凸を含んだ増減表は以下のよう

になる。

x	$2n\pi$	$\cdots$	q_n	$\cdots$	$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	p_n	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		+		+		+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-		-		-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

したがって、 $a_n=p_n$ 、 $b_n=q_n$ であるから、 a_n と b_n は唯1つあって、

$$2n\pi<b_n<2n\pi+\frac{\pi}{2}<a_n<(2n+1)\pi\text{ を満たす。}$$

(証明終)

問2(1)

問1より

$$\begin{aligned}f'(a_n)&=0\\&\Leftrightarrow \sin a_n+a_n\cos a_n=0\\&\Leftrightarrow \cos a_n=-\frac{\sin a_n}{a_n}\left(\because a_n\neq 0\right)\end{aligned}$$

となる。 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<a_n<(2n+1)\pi\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<a_n-2n\pi<\pi$ より $u_n=a_n-2n\pi$ とおくと、 $\frac{\pi}{2}<u_n<\pi$ で

あり、

$$\begin{aligned}\cos(u_n+2n\pi)&=-\frac{\sin(u_n+2n\pi)}{a_n}\\&\Leftrightarrow \cos u_n=-\frac{\sin u_n}{a_n}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<a_n<(2n+1)\pi$ より $\frac{1}{(2n+1)\pi}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ であるから

$$-\frac{\sin u_n}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\cos u_n<-\frac{\sin u_n}{(2n+1)\pi}\left(\because -\sin u_n<0\right)$$

が成り立つ。よって、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sin u_n}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=0$ 、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\sin u_n}{(2n+1)\pi}=0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\cos u_n=0$$

である。したがって、 $\frac{\pi}{2}<u_n<\pi$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}(a_n-2n\pi)&=\lim_{n\rightarrow\infty}u_n\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{2}$

(2)

問1より

$$\begin{aligned}f''(b_n)&=0\\&\Leftrightarrow 2\cos b_n-b_n\sin b_n=0\\&\Leftrightarrow \sin b_n=\frac{2\cos b_n}{b_n}\left(\because b_n\neq 0\right)\end{aligned}$$

となる。 $2n\pi<b_n<2n\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<b_n-2n\pi<\frac{\pi}{2}$ より $v_n=b_n-2n\pi$ とおくと、 $0<v_n<\frac{\pi}{2}$ であり、

$$\begin{aligned}\sin(v_n+2n\pi)&=\frac{2\cos(v_n+2n\pi)}{b_n}\\&\Leftrightarrow \sin v_n=\frac{2\cos v_n}{b_n}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $2n\pi<b_n<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ より $\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{b_n}<\frac{1}{2n\pi}$ であるから

$$\frac{2\cos v_n}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\sin v_n<\frac{\cos v_n}{n\pi}\left(\because \cos v_n>0\right)$$

が成り立つ。よって、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{2\cos v_n}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=0$ 、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\cos v_n}{n\pi}=0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sin v_n=0$$

である。よって、 $0<v_n<\frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}(b_n-2n\pi)&=\lim_{n\rightarrow\infty}v_n\\&=0\end{aligned}$$

である。

(答) 0

(3)

より

$$\begin{aligned}f(b_n)&=b_n\sin b_n\\&=2\cos b_n\\&=2\cos v_n\left(\because v_n=b_n-2n\pi\right)\end{aligned}$$

である。よって、 $\lim_{n\rightarrow\infty}v_n=0$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}f(b_n)&=\lim_{n\rightarrow\infty}2\cos v_n\\&=2\end{aligned}$$

である。

(答) 2

問3

部分積分法より

$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int x\sin xdx\\&=-x\cos x+\int\cos xdx\\&=-x\cos x+\sin x+C\end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。よって、問1の増減表より、

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)dx\\&=\left[-x\cos x+\sin x\right]_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\\&=1+2n\pi\\S_3+S_4&=\int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\pi}f(x)dx\\&=\left[-x\cos x+\sin x\right]_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\pi}\\&=(2n+1)\pi-1\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}(S_3+S_4)-(S_1+S_2)&=\{(2n+1)\pi-1\}-(1+2n\pi)\\&=\pi-2\end{aligned}$$

である。

(答) $\pi-2$

問4(1)

問1の増減表より、 $2n\pi\leq x\leq b_n$ において $f(x)$ は単調に増加するから、

$$0<S_1\leq\int_{2n\pi}^{b_n}f(b_n)dx$$

である。ここで、問2より $\lim_{n\rightarrow\infty}v_n=0$ 、 $\lim_{n\rightarrow\infty}f(b_n)=2$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\int_{2n\pi}^{b_n}f(b_n)dx&=\lim_{n\rightarrow\infty}\left[xf(b_n)\right]_{2n\pi}^{b_n}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}(b_n-2n\pi)f(b_n)\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}v_nf(b_n)\\&=0\end{aligned}$$

となる。よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}S_1=0$$

である。

(答) 0

(2)

$\sin a_n+a_n\cos a_n=0$ より

$$\begin{aligned}S_3&=\int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{a_n}f(x)dx\\&=\left[-x\cos x+\sin x\right]_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{a_n}\\&=-a_n\cos a_n+\sin a_n-1\\&=2\sin a_n-1\\&=2\sin u_n-1\left(\because u_n=a_n-2n\pi\right)\end{aligned}$$

である。ここで、問2より $\lim_{n\rightarrow\infty}u_n=\frac{\pi}{2}$ であるから、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\sin u_n=1$ である。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}S_3&=\lim_{n\rightarrow\infty}(2\sin u_n-1)\\&=1\end{aligned}$$

である。

(答) 1

(3)

$$S_4-S_2=\{(S_3+S_4)-(S_1+S_2)\}+S_1-S_3$$

であるから、問3と問4(1)、(2)の結果より

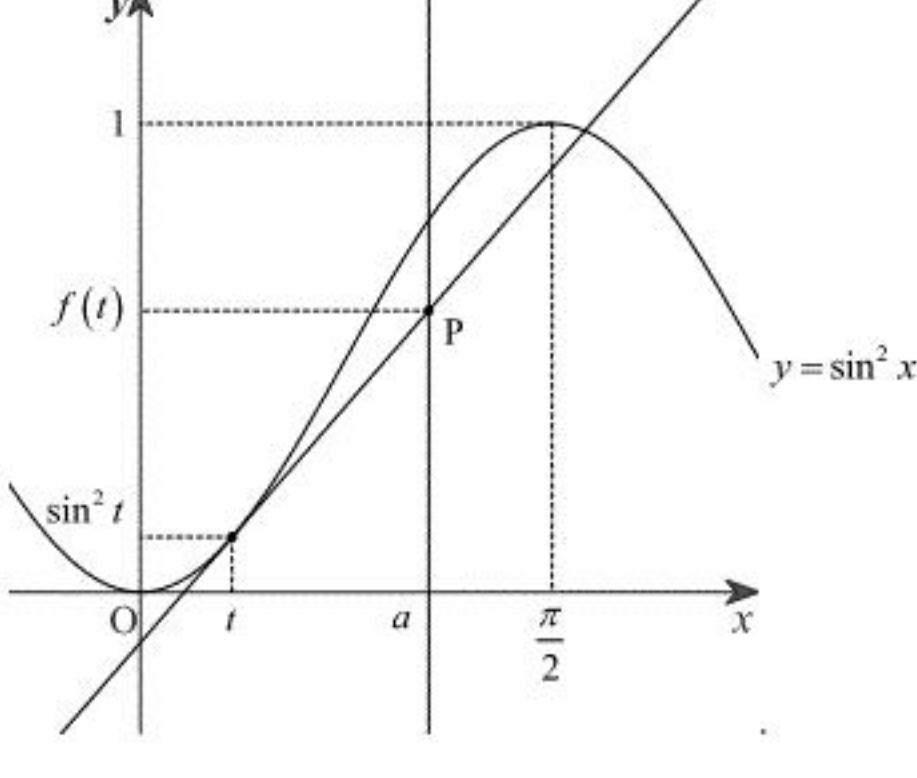
$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}(S_4-S_2)&=\lim_{n\rightarrow\infty}\left[\{(S_3+S_4)-(S_1+S_2)\}+S_1-S_3\right]\\&=(\pi-2)+0-1\\&=\pi-3\end{aligned}$$

である。

(答) $\pi-3$

問題3

問1



$g(t)=\sin^2 t$ とおくと、 $g'(t)=2\sin t\cos t$ であるから、接線の方程式は
 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$
 $\Leftrightarrow y=2(x-t)\sin t\cos t+\sin^2 t$
 $\Leftrightarrow y=(x-t)\sin 2t+\sin^2 t$
である。よって、点Pの y 座標は
 $f(t)=(a-t)\sin 2t+\sin^2 t$
である。

(答) $f(t)=(a-t)\sin 2t+\sin^2 t$

問2

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\sin 2t + 2(a-t)\cos 2t + 2\sin t\cos t \\ &= -\sin 2t + 2(a-t)\cos 2t + \sin 2t \\ &= 2(a-t)\cos 2t \end{aligned}$$

より、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=a, \frac{\pi}{4}$$

である。以下、 a の値で場合分けをして考える。

[1] $a=0$ のとき

$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

よって、 $f(t)$ の最大値は1であり、最小値は $-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ である。

[2] $0 < a < \frac{\pi}{4}$ のとき

$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	a	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\sin^2 a$	$\searrow$	$a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

よって、 $\sin^2 a < 1$ より $f(t)$ の最大値は1であり、最小値は

$a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \geq 0$ 、つまり $a \geq \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ のとき0

$a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} < 0$ 、つまり $a < \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ のとき $a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

である。

[3] $a=\frac{\pi}{4}$ のとき

$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

よって、 $f(t)$ の最大値は1であり、最小値は0である。

[4] $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ のとき

$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	a	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\sin^2 a$	$\nearrow$	1

よって、 $\sin^2 a > 0$ より、 $f(t)$ の最大値は

$a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \leq 1$ 、つまり $a \geq \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ のとき $a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} > 1$ 、つまり $a < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ のとき1

であり、最小値は0である。

[5] $a=\frac{\pi}{2}$ のとき

$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$	$\searrow$	1

よって、 $f(t)$ の最大値は $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ であり、最小値は0である。

以上、[1]~[5]より、 $f(t)$ の最大値は

$0 \leq a < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ のとき1

$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

であり、最小値は

$0 \leq a < \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ のとき $a-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ のとき0

である。

(答) 増減：前表、最大値・最小値：前述

問3

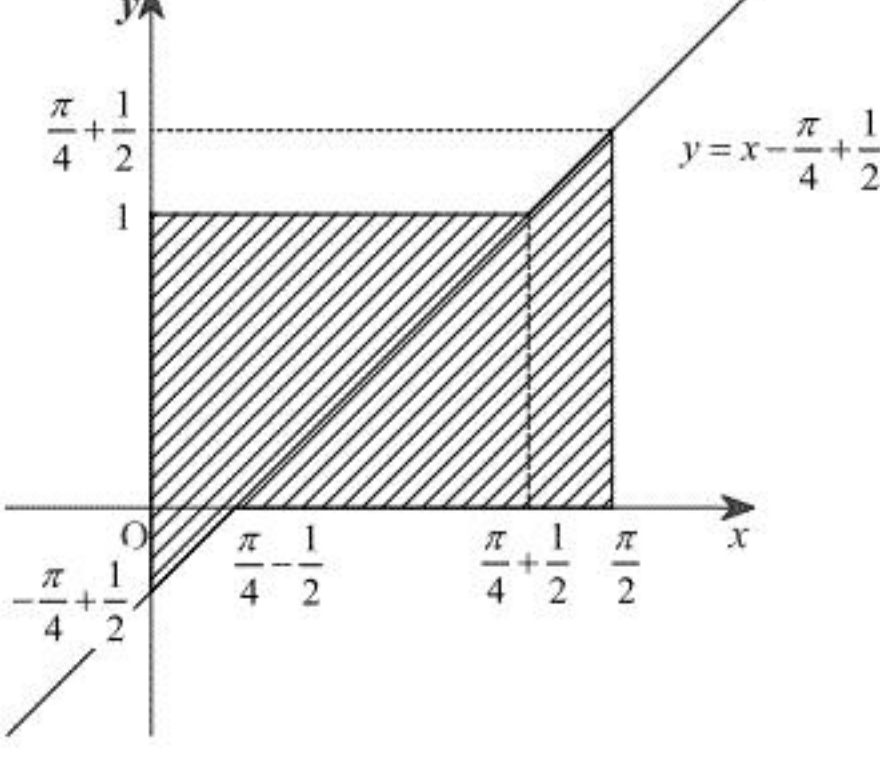
問2の結果より、求める範囲内の点 (x, y) は

$0 \leq x < \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ のとき $x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ のとき $0 \leq y \leq 1$

$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $0 \leq y \leq x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

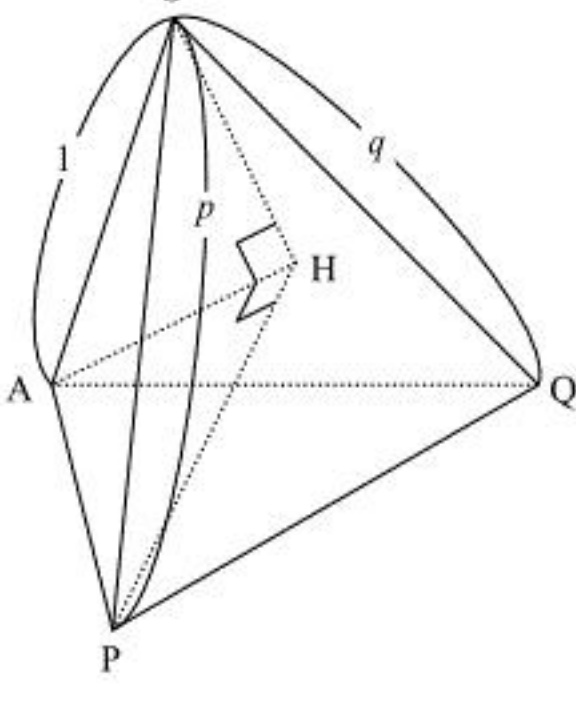
を満たす。したがって、求める範囲を xy 平面に図示すると下図の斜線部分のようになる。ただし、境界線を含む。



(答) 前図

問題4

問 1



与えられた条件より

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1,\left|\overrightarrow{OP}\right|=p,\left|\overrightarrow{OQ}\right|=q$$

であり,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}p$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}pq$$

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=\left|\overrightarrow{OQ}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}q$$

である。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\frac{1}{2}\left(pq-p-q+2\right)\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)}\quad \frac{1}{2}\left(pq-p-q+2\right)$$

問 2

点 H は平面 OPQ 上の点であり、 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は一次独立であるから、 $\overrightarrow{OH}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$$

と表せる。ここで、AH と平面 OPQ は直交するから、 $AH\perp OP, AH\perp OQ$ より

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OP}=0\\\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0\\\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OQ}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}\left(s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0\\\left(s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OQ}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}s\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+t\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0\\s\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+t\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}\frac{1}{2}\left(2p^2s+pq t-p\right)=0\\\frac{1}{2}\left(pqs+2q^2t-q\right)=0\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}2ps+qt=1\left(\because p\neq 0, q\neq 0\right)\\ps+2qt=1\end{cases}\\\therefore (s, t)&=\left(\frac{1}{3p}, \frac{1}{3q}\right)\left(\because p\neq 0, q\neq 0\right)\end{aligned}$$

となる。このとき,

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3p}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3q}\overrightarrow{OQ}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AH}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\left|\frac{1}{3p}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3q}\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\frac{1}{9p^2}\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\frac{1}{9q^2}\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\frac{2}{9pq}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\frac{2}{3q}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3p}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\\&=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+1+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。よって、 $AH=\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ である。

$$\text{(答)}\quad \frac{\sqrt{6}}{3}$$

問 3(1)

$\triangle APQ$ の面積は1 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2-\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\right)^2}&=1\\\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right|^2\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2-\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\right)^2&=4\end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=p^2-p+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2-2\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=q^2-q+1\end{aligned}$$

であり、問 1 より $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(pq-p-q+2\right)$ である。よって、 $p+q=3$ より

$$\begin{aligned}&\left(p^2-p+1\right)\left(q^2-q+1\right)-\left\{\frac{1}{2}\left(pq-p-q+2\right)\right\}^2=4\\\Leftrightarrow &4\left\{\left(pq\right)^2-pq\left(p+q\right)+pq+p^2+q^2-p-q+1\right\}-\left(pq-3+2\right)^2=16\\\Leftrightarrow &4\left\{\left(pq\right)^2-3pq+pq+\left(p+q\right)^2-2pq-3+1\right\}-\left(pq-1\right)^2=16\\\Leftrightarrow &4\left\{\left(pq\right)^2-4pq+7\right\}-\left\{\left(pq\right)^2-2pq+1\right\}=16\\\Leftrightarrow &3\left(pq\right)^2-14pq+11=0\\\Leftrightarrow &\left(pq-1\right)\left(3pq-11\right)=0\\\therefore pq&=1, \frac{11}{3}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $p>0, q>0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\sqrt{pq}&\leq \frac{p+q}{2}\\\Leftrightarrow pq&\leq \frac{9}{4}\left(\because p+q=3\right)\end{aligned}$$

であり、等号成立条件は $p=q=\frac{3}{2}$ である。したがって、 $\frac{9}{4}<\frac{11}{3}$ より $pq=1$ である。

$$\text{(答)}\quad 1$$

(2)

$p+q=3, pq=1$ より、 p, q は 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ の異なる 2 つの実数解である。したがって、

$$\begin{aligned}x^2-3x+1&=0\\\Leftrightarrow x&=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

であり、 $p\leq q$ であるから、 $p=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ である。

$$\text{(答)}\quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(3)

四面体 OAPQ について、 $\triangle OPQ$ を底面とみたとき、その高さは AH である。ここで、 $\triangle OPQ$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\sin 60^{\circ}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}pq\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

である。よって、問 2 より $AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$ であるから、四面体 OAPQ の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot AH\cdot S\\&=\frac{1}{3}\cdot \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)}\quad \frac{\sqrt{2}}{12}$$