

平成 27 年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、2 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1 $f(p, q, r) = p^3 - q^3 - 27r^3 - 9pqr$ について、次の問いに答えよ.

問 1 $f(p, q, r)$ を因数分解せよ.

問 2 等式 $f(p, q, r) = 0$ と $p^2 - 10q - 30r = 11$ との両方を満たす正の整数の組 (p, q, r) をすべて求めよ.

問題 2 n を正の整数とする. $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ の範囲で関数 $f(x) = x \sin x$ を考える. 関数 $f(x)$ が極大値をとる x を a_n とし, 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を $(b_n, f(b_n))$ とする. 次の問いに答えよ.

問 1 a_n と b_n はそれぞれ^{ただ}1つあって, $2n\pi < b_n < 2n\pi + \frac{\pi}{2} < a_n < (2n+1)\pi$ を満たすことを示せ.

問 2 以下の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2n\pi) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 2n\pi) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

問 3 曲線 $y = f(x)$ ($2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$) と x 軸とで囲まれた図形を, 3つの直線 $x = b_n$, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = a_n$ によって4つの部分に分ける. その面積を左から順に S_1, S_2, S_3, S_4 とするとき, $(S_3 + S_4) - (S_1 + S_2)$ の値を求めよ.

問 4 以下の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} S_3 \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} (S_4 - S_2)$$

問題 3 曲線 $C: y = \sin^2 x$ について、 C 上の点 $(t, \sin^2 t)$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ における C の接線と直線 $x = a$ との交点を P とする。ただし、 a は $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。このとき、次の問いに答えよ。

問 1 点 P の y 座標を $f(t)$ とおくと、 $f(t)$ を求めよ。

問 2 関数 $f(t)$ の増減を調べ、その最大値と最小値を求めよ。

問 3 t が $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、点 $(t, \sin^2 t)$ における C の接線が通るすべての点のうち、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ となるものの範囲を xy 平面に図示せよ。

問題 4 四面体 $OAPQ$ において、 $\angle AOP = \angle AOQ = \angle POQ = 60^\circ$ 、 $OA = 1$ 、 $OP = p$ 、 $OQ = q$ とし、頂点 A から平面 OPQ に下ろした垂線を AH とする。ただし、 $p \leq q$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

問 1 内積 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ を p 、 q を用いて表せ。

問 2 AH の長さを求めよ。

問 3 $p + q = 3$ 、および $\triangle APQ$ の面積が 1 のとき、以下の値を求めよ。

- (1) pq (2) p (3) 四面体 $OAPQ$ の体積

