

問題 1

問 1

点 P_n は曲線 $C: y = e^{-x}$ 上の点であるため、実数 t を用いて座標を $P_n(t, e^{-t})$ とおける。また、

$f(x) = e^{-x}$ とおくと、 $f'(x) = -e^{-x}$ であるため、この点を通る曲線 C の接線 L_n の方程式は

$$y = -e^{-t}(x-t) + e^{-t} = -e^{-t}(x-t-1)$$

となる。これが点 $(n, 0)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} 0 &= -e^{-t}(n-t-1) \\ \therefore t &= n-1 \quad (\because e^{-t} \neq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、求める P_n の座標は $P_n(n-1, e^{-n+1})$ となる。

(答) $P_n(n-1, e^{-n+1})$

問 2

問 1 の結果を利用すると、 L_n と L_{n+1} の方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} L_n: y &= -e^{-n+1}(x-n) \\ L_{n+1}: y &= -e^{-n}(x-n-1) \end{aligned}$$

となる。よって、交点 Q_n の x 座標は、

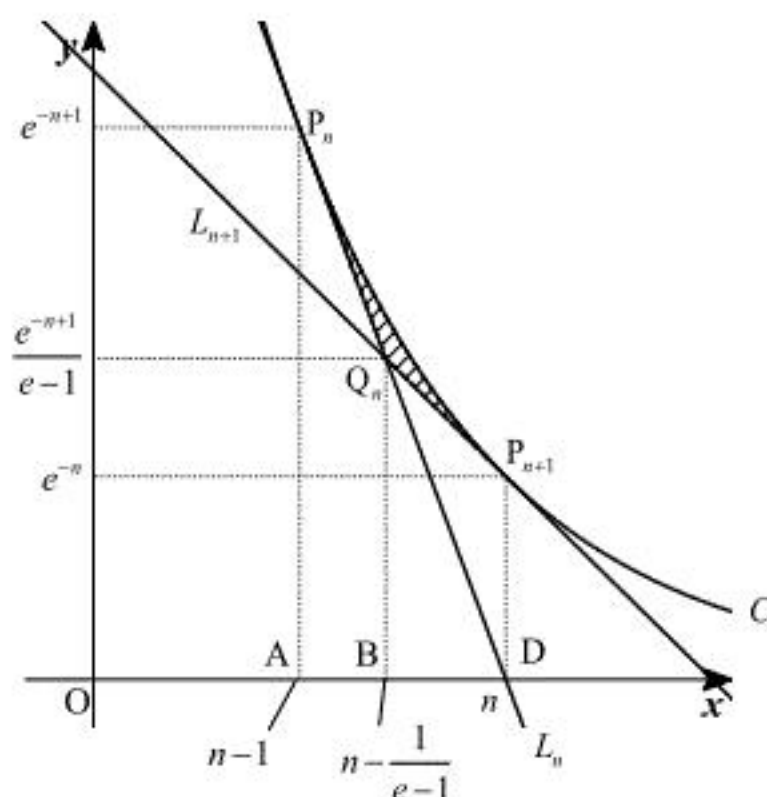
$$\begin{aligned} e^{-n+1}(x-n) &= e^{-n}(x-n-1) \\ \Leftrightarrow (e-1)x &= en-n-1 \\ \Leftrightarrow x &= n - \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

であり、これを L_n の方程式に代入すると、 Q_n の座標は $Q_n\left(n - \frac{1}{e-1}, \frac{e^{-n+1}}{e-1}\right)$ と求まる。

(答) $Q_n\left(n - \frac{1}{e-1}, \frac{e^{-n+1}}{e-1}\right)$

問 3

L_n, L_{n+1} および曲線 C で囲まれる部分を図示すると、以下の図のようになる。



この領域を直線 $x = n - \frac{1}{e-1}$ を境に 2 分割して考えると、求める領域の面積は $n-1 \leq x \leq n$ に

おける曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積から、2 つの台形 P_nABQ_n, Q_nBDP_{n+1} の面積を引いたものとなる。よって S_n は、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{n-1}^n e^{-x} dx - \frac{1}{2} \left(e^{-n+1} + \frac{e^{-n+1}}{e-1} \right) \cdot \left\{ n - \frac{1}{e-1} - (n-1) \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-n+1}}{e-1} + e^{-n} \right) \cdot \left\{ n - \left(n - \frac{1}{e-1} \right) \right\} \\ &= \left[-e^{-x} \right]_{n-1}^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-n+2}}{e-1} \cdot \frac{e-2}{e-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{-n+1} - e^{-n}}{e-1} \cdot \frac{1}{e-1} \\ &= e^{-n} \left\{ (e-1) - \frac{e^2(e-2)}{2(e-1)^2} - \frac{2e-1}{2(e-1)^2} \right\} \\ &= \frac{e^{-n}(e^3 - 4e^2 + 4e - 1)}{2(e-1)^2} \\ &= e^{-n} \cdot \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < e^{-1} < 1$ に注意すると、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)} \cdot \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)^2}$$

となる。

(答) $\frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)^2}$

問題 2

問 1

実数係数の3次方程式が実数解と虚数解をともにもつ場合、その虚数解は2つ存在し、互いに共役複素数の関係となる。ここで、 γ は実数であり、 α は虚部が正の複素数であるから、 $\beta = \bar{\alpha}$ であり、 α, β の実部は等しくなる。ここで、複素数平面上において3点

$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ が同一直線上にあることから、 α, β の実部は $-\frac{1}{2}$ に限られる。また

$|\alpha| = |\beta| = 1$ かつ α の虚部は正であることから、

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となり、このとき(i)-(iv)のすべての条件を満たす。また、3次方程式の解と係数の関係より、

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma) = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = |\alpha|^2 + \gamma(\alpha + \bar{\alpha}) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{3}{2}$$

$$c = -\alpha\beta\gamma = -|\alpha|^2 \gamma = \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

問 2

$$w_1 = \frac{1+4z}{2z} \text{ より,}$$

$$2zw_1 = 1+4z$$

$$\Leftrightarrow 2z(w_1 - 2) = 1$$

と変形できるが、 $w_1 = 2$ のときこの式が成り立たないため、 $w_1 \neq 2$ となる。よって、上式の両辺を $w_1 - 2$ で割ってよく、

$$2z = \frac{1}{w_1 - 2}$$

となる。ここで、点Pは直線L上を動くことから、その実部は $-\frac{1}{2}$ である。よって、

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{w_1 - 2} + \frac{1}{\overline{w_1 - 2}} = -2$$

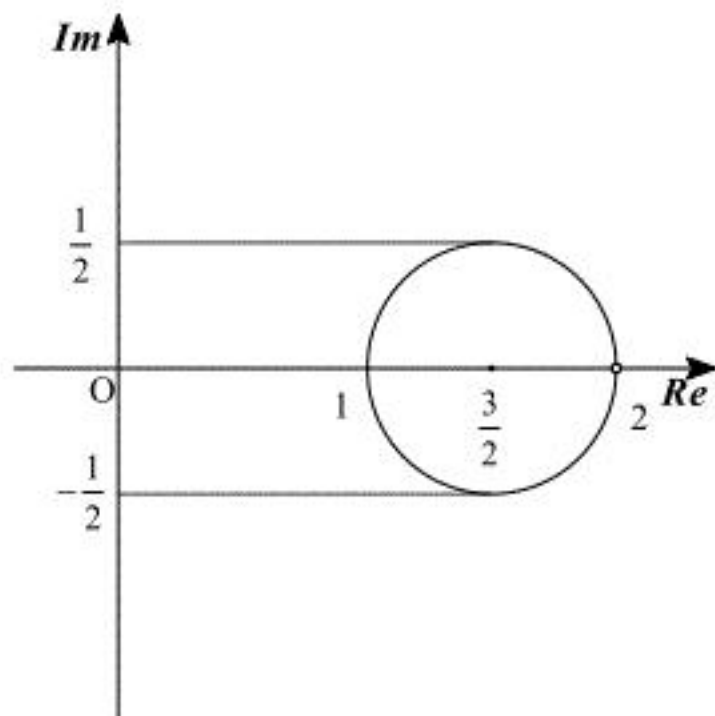
$$\Leftrightarrow 2|w_1|^2 - 3w_1 - 3\overline{w_1} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left|w_1 - \frac{3}{2}\right|^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|w_1 - \frac{3}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left|w_1 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

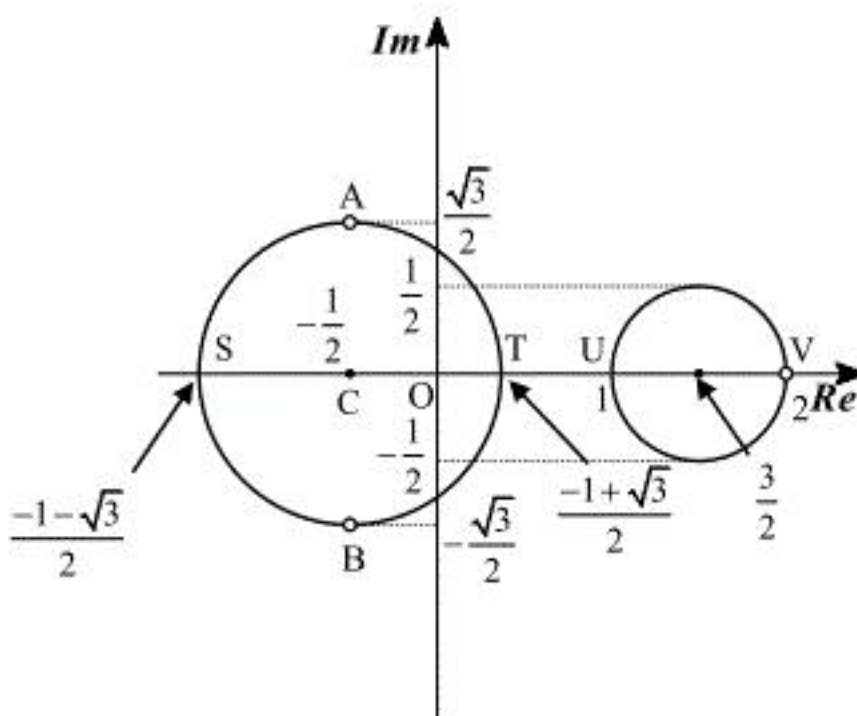
となる。よって、点Q(w_1)の軌跡は、実軸上の点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円より $w_1 = 2$ を除いた部分となるから、図示すると以下ようになる。



(答) 前図 (ただし、 $w_1 = 2$ を除く)

問 3

w_2 は $\arg\left(\frac{\beta - w_2}{\alpha - w_2}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ を満たすことから、2点A(α), B(β)を結ぶ線分を直径とする円のうち、2点A(α), B(β)を除いた部分を動く。これを図示すると以下ようになる。



図のように4点S, T, U, Vをそれぞれ定めると、 $|w_1 - w_2|$ の取りうる値は w_1, w_2 がそれぞれV, Sにあるときよりも小さくなり、その距離は

$$2 - \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$$

である。また、最小となるのは w_1, w_2 がそれぞれU, Tにあるときで、その距離は

$$1 - \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

となる。以上より、 $|w_1 - w_2|$ の取りうる値の範囲は $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \leq |w_1 - w_2| < \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$ である。

(答) 軌跡：前図(ただし、2点A, Bを除く), 範囲： $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \leq |w_1 - w_2| < \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$

問題 3

問 1

$\angle OAB = \theta$ ， $AB = 1$ より A, B の座標はそれぞれ $A(\cos \theta, 0)$ ， $B(0, \sin \theta)$ と表せる。また，直線 L_θ の傾きは $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ であるので，直線 L_θ の方程式は，

$$y = -x \tan \theta + \sin \theta$$

となる。ただし， $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

(答) $y = -x \tan \theta + \sin \theta$

問 2

点 P_θ の y 座標は，問 1 で求めた式に $x = t$ を代入することで，

$$y = -t \tan \theta + \sin \theta$$

となり， $f(\theta) = -t \tan \theta + \sin \theta$ とおくと，

$$f'(\theta) = -\frac{t}{\cos^2 \theta} + \cos \theta = \frac{\cos^3 \theta - t}{\cos^2 \theta}$$

となる。ここで， $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲において， $\cos \theta = \sqrt[3]{t}$ を満たす θ を β とおく。 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ において $\cos^3 \theta$ は単調減少であるため，条件を満たす β はこの範囲にただ 1 つのみ存在する。

[1] $0 < t < 1$ のとき

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos \theta \leq 1$ となるため， $f(\theta)$ の増減表は以下のとおりとなる。

θ	0	...	β	...	1
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$			極大		

増減表より， $\theta = \beta$ において $f(\theta)$ は最大値をとるため， $\alpha = \beta$ であり， $\cos \alpha = \sqrt[3]{t}$ となる。

[2] $t = 1$ のとき

$f(\theta)$ の増減表は以下のとおりとなる。

θ	0	...	1
$f'(\theta)$	0	-	
$f(\theta)$			

増減表より，常に $f'(\theta) \leq 0$ であるため，この等号をみたすのは $\theta = 0$ のときのみである。

このとき $f(\theta)$ は最大値をとり， $\cos \alpha = 1 = \sqrt[3]{t}$ となる。

以上，[1]，[2] より， $\cos \alpha = \sqrt[3]{t}$ となる。

(答) $\cos \alpha = \sqrt[3]{t}$

問 3

問 2 の結果より， $t = \cos^3 \alpha$ となる。よって $y = -t \tan \theta + \sin \theta$ は $\theta = \alpha$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -\cos^3 \alpha \tan \alpha + \sin \alpha \\ &= -\cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \\ &= \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

となり， P_α の座標は $(\cos^3 \alpha, \sin^3 \alpha)$ となる。また $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき，

$$\cos^3 \frac{\pi}{4} = \sin^3 \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

となるため， $P_{\frac{\pi}{4}}$ の直交座標は $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ となる。よって， $P_{\frac{\pi}{4}}$ の極座標は $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ となる。

(答) L_α の直交座標： $(\cos^3 \alpha, \sin^3 \alpha)$ ， $P_{\frac{\pi}{4}}$ の極座標： $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$

問 4

問 3 の結果より，曲線 C は $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ において変数 α を用いて

$$\begin{cases} x = \cos^3 \alpha \\ y = \sin^3 \alpha \end{cases}$$

と媒介変数表示できる。これより，

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\alpha} = -3\cos^2 \alpha \sin \alpha \\ \frac{dy}{d\alpha} = 3\cos \alpha \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

が得られる。よって，点 P_α における曲線 C の接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= -\tan \alpha (x - \cos^3 \alpha) + \sin^3 \alpha \\ &= -x \tan \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin^3 \alpha \\ &= -x \tan \alpha + \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= -x \tan \alpha + \sin \alpha \end{aligned}$$

となり，これは L_α と一致する。

(証明終)

また，曲線 C について媒介変数 α を用いた増減表は以下のとおりとなる。

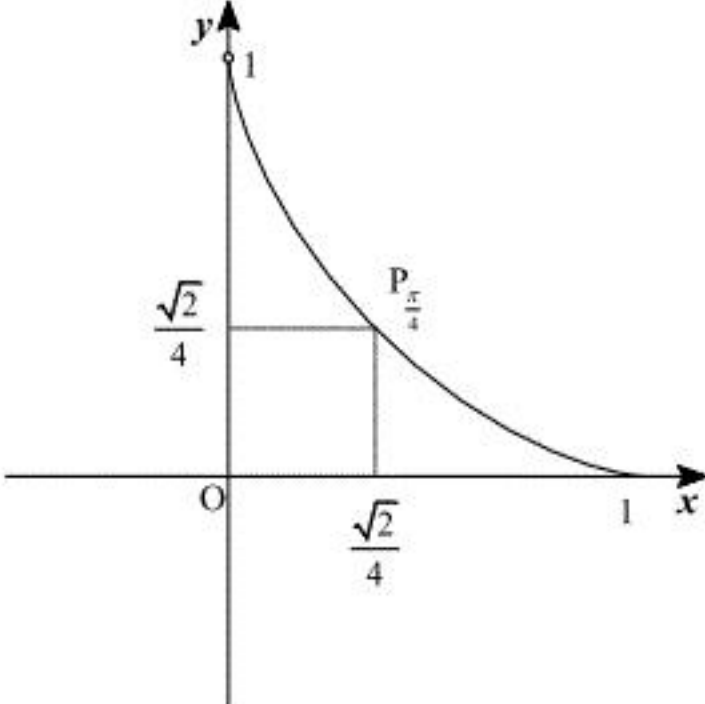
α	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\alpha}$	0	-	
$\frac{dy}{d\alpha}$	0	+	
(x, y)	(1, 0)		(0, 1)

また， $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲において，

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dx} \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{-3\cos^2 \alpha \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{3\cos^4 \alpha \sin \alpha} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから，曲線 C は下に凸である。以上より，曲線 C が $P_{\frac{\pi}{4}}$ を通ることも考慮してグラフを

描くと，以下のようになる。



(答) 前図

問題 4

問 1

1 台目の車が場所 X に駐車する確率を P_X とする。すべての枠が空いている場合、B, C は両隣が空いているため、 $P_A = P_B = P_C = 3P_D$ が成り立つ。よって、1 台目の自動車が A に駐車する確率 P_A を求めると、

$$\begin{aligned} 1 &= P_A + P_B + P_C + P_D \\ &= P_A + P_A + P_A + \frac{1}{3}P_A \\ &= \frac{10}{3}P_A \\ \therefore P_A &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{10}$

問 2

問 1 の過程より、それぞれの場所に 1 台目の車が駐車する確率を求めると、

$$P_A = P_B = P_C = \frac{3}{10}, P_D = \frac{1}{10}$$

となる。ここで、B, D に駐車する順序により場合分けを考える。

[1] B → D の順に駐車する場合

2 台目以降の車に対して YZ... の位置にすでに車が駐車しているとき、次の車が場所 X に止まる確率を $P_X^{YZ\dots}$ とすると、C の隣の枠は既に駐車されていることから、 $P_A^B = 3P_C^B = 3P_D^B$ となる。よって、2 台目の自動車が D に駐車する確率 P_D^B を求めると、

$$\begin{aligned} 1 &= P_A^B + P_C^B + P_D^B \\ &= 3P_D^B + P_D^B + P_D^B \\ &= 5P_D^B \\ \therefore P_D^B &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となるから、B → D の順で車が駐車する確率は、

$$P_B \cdot P_D^B = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

となる。

[2] D → B の順に駐車する場合

B の両隣は空いており、C の隣の枠は駐車されていることから、 $P_A^D = P_B^D = 3P_C^D$ が成り立つ。よって、2 台目が B に駐車する確率 P_B^D を求めると、

$$\begin{aligned} 1 &= P_A^D + P_B^D + P_C^D \\ &= P_B^D + P_B^D + \frac{1}{3}P_B^D \\ &= \frac{7}{3}P_B^D \\ \therefore P_B^D &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

となるから、D → B の順で車が駐車する確率は、

$$P_D \cdot P_B^D = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{70}$$

となる。

以上[1], [2]より、最初の 2 台が B, D に駐車する確率は、

$$\frac{3}{50} + \frac{3}{70} = \frac{18}{175}$$

となる。

(答) $\frac{18}{175}$

問 3

1 台目の駐車する枠により場合分けを考える。

[1] A に駐車する場合

B の隣の枠は駐車されており、C は両隣が空いている。よって、 $3P_B^A = P_C^A = 3P_D^A$ より、

$$P_B^A = P_D^A = \frac{1}{5}, P_C^A = \frac{3}{5}$$

となる。A → B の順で駐車する場合、C の隣の枠は駐車されている。よって、 $P_C^{AB} = P_D^{AB}$ より、

$$P_C^{AB} = P_D^{AB} = \frac{1}{2}$$

となる。また、A → D の順で駐車したときも、同様にして

$$P_B^{AD} = P_C^{AD} = \frac{1}{2}$$

となる。よって、1 台目が A に駐車する場合、最後に C が残る確率は、

$$P_A \left(P_B^A \cdot P_D^{AB} + P_D^A \cdot P_B^{AD} \right) = \frac{3}{10} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{50}$$

となる。

[2] B に駐車する場合

C の隣の枠は駐車されている。よって、 $P_A^B = 3P_C^B = 3P_D^B$ より、

$$P_A^B = \frac{3}{5}, P_C^B = P_D^B = \frac{1}{5}$$

となる。B → A の順で駐車する場合、C の隣の枠は駐車されている。よって、 $P_C^{AB} = P_D^{AB}$ より、

$$P_C^{AB} = P_D^{AB} = \frac{1}{2}$$

となる。また、B → D の順で駐車する場合、 $P_A^{BD} = 3P_C^{BD}$ より、

$$P_A^{BD} = \frac{3}{4}, P_C^{BD} = \frac{1}{4}$$

となる。以上より、1 台目が B に駐車する場合、最後に C が残る確率は、

$$P_B \left(P_A^B \cdot P_D^{AB} + P_D^B \cdot P_A^{BD} \right) = \frac{3}{10} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{27}{200}$$

となる。

[3] D に駐車する場合

B の両隣は空いているが、C の隣の枠は駐車されている。よって、 $P_A^D = P_B^D = 3P_C^D$ より、

$$P_A^D = P_B^D = \frac{3}{7}, P_C^D = \frac{1}{7}$$

となる。D → A の順で駐車する場合、B, C ともに隣の枠は駐車されている。よって、 $P_B^{AD} = P_C^{AD}$ より、

$$P_B^{AD} = P_C^{AD} = \frac{1}{2}$$

となる。また、D → B の順で駐車する場合、 $P_A^{BD} = 3P_C^{BD}$ より、

$$P_A^{BD} = \frac{3}{4}, P_C^{BD} = \frac{1}{4}$$

となる。以上より、1 台目が D に駐車する場合、最後に C が残る確率は、

$$P_D \left(P_A^D \cdot P_B^{AD} + P_B^D \cdot P_A^{BD} \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{56}$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、最後に C の枠が残る確率は、

$$\frac{3}{50} + \frac{27}{200} + \frac{3}{56} = \frac{87}{350}$$

となる。

(答) $\frac{87}{350}$