

問題 1

問 1

実際に X はないが、X があると判定される確率は、

$$\frac{97}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{970}{10000}$$

となる。また、実際に悪性の X があり、X があると判定される確率は、

$$\frac{3}{100} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{95}{100} = \frac{95}{10000}$$

となる。さらに、実際に良性の X があり、X があると判定される確率は、

$$\frac{3}{100} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{80}{100} = \frac{160}{10000}$$

となる。これらの事象は互いに排反であり、X があると判定されるという事象はこれらの和事象だから、求める確率は、

$$\frac{970}{10000} + \frac{95}{10000} + \frac{160}{10000} = \frac{1225}{10000} = \frac{49}{400}$$

となる。

(答) $\frac{49}{400}$

問 2

問 1 より、実際に悪性の X があり、X があると判定される確率は $\frac{95}{10000} = \frac{19}{2000}$ であり、X が

あると判定される確率は $\frac{49}{400}$ だから、求める確率は、

$$\frac{\frac{19}{2000}}{\frac{49}{400}} = \frac{19}{245}$$

となる。

(答) $\frac{19}{245}$

問 3

実際に悪性の X がない確率は、

$$1 - \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{99}{100}$$

であり、実際に悪性の X がなく、X がないと判定される、すなわち実際に X がない、もしくは良性の X があり、X がないと判定される確率は、

$$\frac{97}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{100} = \frac{877}{1000}$$

となる。したがって求める確率は、

$$\frac{\frac{877}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{877}{990}$$

となる。

(答) $\frac{877}{990}$

問題 2

問 1

$0 \leq x \leq \pi$ において $\sin x \geq 0$ だから $g(x) \geq 0$ である。よって求める面積は、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi g(x) dx &= \int_0^\pi \sin x \sin^2 nx dx \\&= \int_0^\pi \sin x \left(\frac{1 - \cos 2nx}{2} \right) dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \sin x - \frac{1}{2} \sin(2n+1)x + \frac{1}{2} \sin(2n-1)x \right\} dx \\&= \frac{1}{2} \left[-\cos x + \frac{\cos(2n+1)x}{2(2n+1)} - \frac{\cos(2n-1)x}{2(2n-1)} \right]_0^\pi \\&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n-1)} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n-1)} \right\} \\&= \frac{4n^2}{4n^2 - 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

問 2

求める点の x 座標を t とおくと、 t の満たすべき条件は

$$\begin{aligned}&\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \sin t \sin^2 nt \\ \cos t = \cos t \sin^2 nt + \sin t (2n \sin nt \cos nt) \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t (1 - \sin^2 nt) = 0 \\ \cos t (1 - \sin^2 nt) - 2n \sin t \sin nt \cos nt = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t \cos^2 nt = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ \cos nt (\cos t \cos nt - 2n \sin t \sin nt) = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。①より t は

$$\left[\sin t = 0 \right] \text{ または } \left[\cos^2 nt = 0 \Leftrightarrow \cos nt = 0 \right]$$

を満たす。 $\sin t = 0$ のとき $t = 0, \pi$ だから②の右辺は 1 または -1 となり不適である。一方、 $\cos nt = 0$ のとき明らかに②を満たし、適する。以上のことと $0 \leq nt \leq n\pi$ であることから t の満たすべき条件は

$$\begin{aligned}\cos nt &= 0 \\&\Leftrightarrow nt = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\&\therefore t = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

となる。よって求める点の座標は

$$\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}, \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \right) \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}, \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \right) \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

問 3

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \right)$$

と表せるから

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n} \right)\end{aligned}$$

となる。区分解積分法を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\&= \left[\frac{1}{\pi} (-\cos \pi x) \right]_0^1 \\&= \frac{2}{\pi} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} &= \int_0^1 \cos \pi x dx \\&= \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^1 \\&= 0\end{aligned}$$

となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2}{\pi} \cdot 1 - 0 \cdot 0 = \frac{2}{\pi}$$

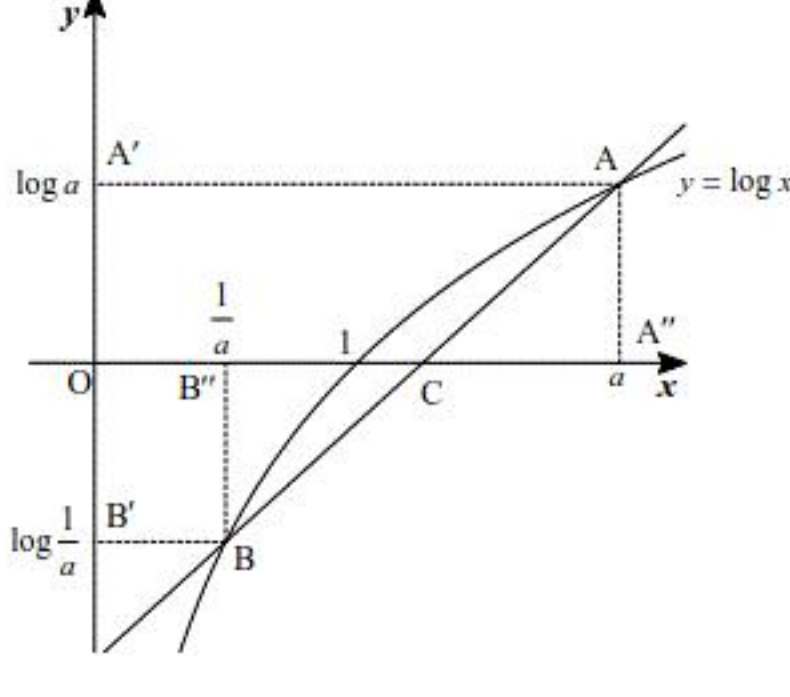
である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2}{\pi}$$

問題 3

問 1

2 点 A, B から y 軸へ下した垂線の足を A', B' とし, x 軸へ下した垂線の足を A'', B'' とする。
さらに直線 AB と x 軸との交点を C とおく。このとき曲線 $y = \log x$, 直線 AB および点
A, B, A', B', A'', B'', C を図示すると以下ようになる。



台形 AA'B'B の面積を S_0 とおくと, $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$ であることと, 図より

$$\begin{aligned} S &= S_0 - \int_{\log \frac{1}{a}}^{\log a} e^y dy \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \left(\log a - \log \frac{1}{a} \right) - \left[e^y \right]_{\log \frac{1}{a}}^{\log a} \\ &= \left(a + \frac{1}{a} \right) \log a - \left(a - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

となる。また, $\log \frac{1}{a} = -\log a$ だから $\triangle B''BC$ と $\triangle A''AC$ は二角夾辺相等により

$\triangle B''BC \equiv \triangle A''AC$ となる。したがって $B''C = A''C$ であるから

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \log a = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \log a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \left(a + \frac{1}{a} \right) \log a - \left(a - \frac{1}{a} \right), T = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \log a$$

問 2(1)

問 1 の結果より

$$\begin{aligned} \frac{S}{T} &= \frac{\left(a + \frac{1}{a} \right) \log a - \left(a - \frac{1}{a} \right)}{\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \log a} \\ &= 2 \left(\frac{1 + \frac{1}{a^2}}{1 - \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\log a} \right) \\ &\rightarrow 2 \quad (a \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{T} = 2$$

(2)

問 1 の結果より

$$\begin{aligned} \frac{T}{(a-1)^2} &= \frac{\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \log a}{(a-1)^2} \\ &= \frac{a+1}{2a} \cdot \frac{\log a}{a-1} \\ &= \frac{a+1}{2a} \cdot \frac{\log a - \log 1}{a-1} \end{aligned}$$

である。ここで, $p(a) = \log a$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{\log a - \log 1}{a-1} &= \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{p(a) - p(1)}{a-1} \\ &= p'(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{T}{(a-1)^2} = \frac{1+1}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{T}{(a-1)^2} = 1$$

(3)

$a > 1$ であることと問 1 の結果と与式により

$$\begin{aligned} \frac{S}{(a-1)^2} &= \frac{\left(a + \frac{1}{a} \right) \log \{ 1 + (a-1) \} - \left(a - \frac{1}{a} \right)}{(a-1)^2} \\ &< \frac{(a^2+1) \left\{ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} \right\} - (a^2-1)}{a(a-1)^2} \\ &= \frac{(a^2+1) \left(1 - \frac{a-1}{2} \right) - (a+1)}{a(a-1)} + \frac{(a^2+1)(a-1)}{3a} \\ &= \frac{-a^2+2a-1}{2a} + \frac{(a^2+1)(a-1)}{3a} \\ &\rightarrow 0 \quad (a \rightarrow 1+0) \end{aligned}$$

となる。一方, S は面積を表すから $S \geq 0$ すなわち $\frac{S}{(a-1)^2} \geq 0$ となる。よって, はさみうちの

の原理より

$$\lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{(a-1)^2} = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{(a-1)^2} = 0$$

(4)

問 2 の(1), (2)の結果より

$$\begin{aligned} \frac{S}{T} &= \frac{S}{(a-1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{T}{(a-1)^2}} \\ &\rightarrow 0 \cdot 1 \\ &= 0 \quad (a \rightarrow 1+0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{T} = 0$$

問 3

$f(a) = \frac{S}{T}$ とおくと, 問 1 の結果より

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{\left(a + \frac{1}{a} \right) \log a - \left(a - \frac{1}{a} \right)}{\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \log a} \\ &= 2 \left(\frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{1}{\log a} \right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{2}{a^2-1} - \frac{1}{\log a} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2 \left\{ -\frac{4a}{(a^2-1)^2} + \frac{1}{a(\log a)^2} \right\} \\ &= \frac{2 \left\{ (a^2-1)^2 - (2a \log a)^2 \right\}}{a(a^2-1)(\log a)^2} \\ &= \frac{2(a^2-1+2a \log a)(a^2-1-2a \log a)}{a(a^2-1)(\log a)^2} \end{aligned}$$

となる。 $a > 1$ より

$$\frac{2(a^2-1+2a \log a)}{a(a^2-1)(\log a)^2} > 0$$

であるから, $f'(a)$ の符号は $a^2-1-2a \log a$ の符号と一致する。そこで

$$g(a) = a^2-1-2a \log a$$

とおくと

$$g'(a) = 2a-2 \log a-2$$

$$g''(a) = \frac{2(a-1)}{a}$$

となる。 $a \geq 1$ において $g''(a) \geq 0$ だから $g'(a)$ は $a \geq 1$ で単調に増加する。よって

$$g'(a) \geq g'(1) = 0$$

となるから, $g(a)$ も $a \geq 1$ において単調に増加する。したがって

$$g(a) \geq g(1) = 0$$

である。よって $a > 1$ において $f'(a) \geq 0$ つまり $f(a)$ が単調に増加することが示された。

(証明終)

問 4

$a > 1$ において $T > 0$ だから $S = T \Leftrightarrow \frac{S}{T} = f(a) = 1$ を満たす a が $e^{\frac{1}{2}} < a < e^2$ に唯一つ存在するこ

とを示す。 $a = e^{\frac{1}{2}}, e^2$ における $f(a)$ の値は

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) &= 2 \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}-1} - \frac{2}{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{e^{\frac{1}{2}}-1} \\ &< \frac{2}{3} + \frac{4}{(2.7)^{\frac{1}{2}}-1} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{18.683} \\ &< \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\ &= 1 \\ f(e^2) &= 2 \left(1 + \frac{2}{e^2-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{4}{e^2-1} \\ &> 1 \end{aligned}$$

となる。したがって

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) < 1 < f(e^2)$$

であり, さらに問 3 より $f(a)$ は $a > 1$ において単調に増加するから $f(a) = 1$ を満たす a が

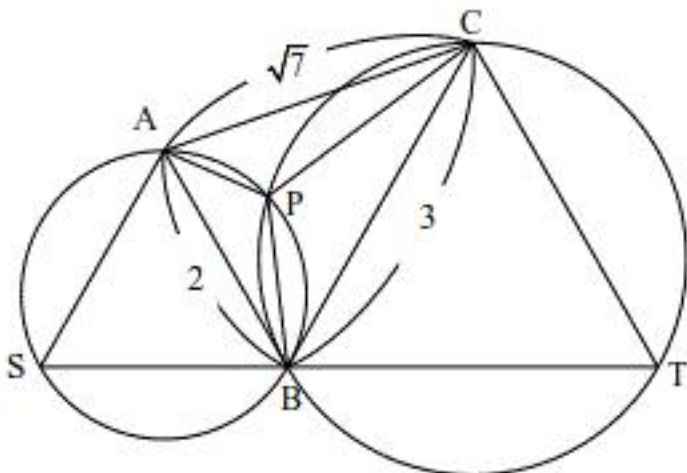
$e^{\frac{1}{2}} < a < e^2$ に唯一つ存在する。

(証明終)

問題 4

問 1

△ABC および△ASB, △BTC, 点P を図示すると以下のようになる。



△ABC に余弦定理を用いて

$$\cos \angle ABC = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

となる。よって $0 < \angle ABC < 180^\circ$ より

$$\angle ABC = 60^\circ$$

である。

(答) $\angle ABC = 60^\circ$

問 2

四角形 ASBP と四角形 BTCP は円に内接するから、

$$\angle BSA + \angle APB = 180^\circ$$

$$\angle BTC + \angle BPC = 180^\circ$$

が成り立つ。したがって、 $\angle BSA = \angle BTC = 60^\circ$ より、

$$\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$$

となる。さらに、このことと問 1 より

$$\begin{aligned} \angle ABP &= 60^\circ - \angle PBC \\ &= 60^\circ - (180^\circ - 120^\circ - \angle BCP) \\ &= \angle BCP \end{aligned}$$

となる。したがって二角相等により△PAB ∽ △PBC である。

(証明終)

△PAB ∽ △PBC より

$$AB : AP = BC : BP$$

$$\therefore AP = \frac{2}{3} BP$$

$$AB : BP = BC : CP$$

$$\therefore CP = \frac{3}{2} BP$$

となる。BP = x とおき、△ABP に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} 4 &= x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3}x \cdot \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{36}{19} \\ \therefore x &= \frac{6\sqrt{19}}{19} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $AP = \frac{4\sqrt{19}}{19}$, $BP = \frac{6\sqrt{19}}{19}$, $CP = \frac{9\sqrt{19}}{19}$ と求まる。

(答) $AP = \frac{4\sqrt{19}}{19}$, $BP = \frac{6\sqrt{19}}{19}$, $CP = \frac{9\sqrt{19}}{19}$

問 3

問 1, 問 2 より

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{4\sqrt{19}}{19} \cdot \frac{9\sqrt{19}}{19} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{18}{19} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{4\sqrt{19}}{19} \cdot \frac{6\sqrt{19}}{19} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{12}{19} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow 9 &= 7 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4 \\ \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1 \end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ とおくと

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (-\overrightarrow{AP}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = |\overrightarrow{AP}|^2 - (a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{16}{19} - a - 7b \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-\overrightarrow{AP}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) = |\overrightarrow{AP}|^2 - (a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{16}{19} - 4a - b \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。①, ②, ③, ④から $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を消去し

$$-\frac{18}{19} = \frac{16}{19} - a - 7b \Leftrightarrow a + 7b = \frac{34}{19} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$-\frac{12}{19} = \frac{16}{19} - 4a - b \Leftrightarrow 4a + b = \frac{28}{19} \quad \cdots \textcircled{6}$$

となる。これより、

$$a = \frac{6}{19}, b = \frac{4}{19}$$

であるから、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{6}{19}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{19}\overrightarrow{AC}$$

と求まる。

(答) $\overrightarrow{AP} = \frac{6}{19}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{19}\overrightarrow{AC}$