

平成 30 年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、4 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1 ある臓器にできる腫瘍^{しゅよう} X は悪性と良性の 2 つの型に分けられ、同時に両方の型であることはない。実際に X がある人となない人の割合は 3 % と 97 % であり、X がある人のうち、悪性の人と良性の人の割合は 1 : 2 である。そして、腫瘍 X があるかないかを調べる検査 Y について、次の事が知られている。

- (i) 悪性の X がある人に Y が用いられると、95 % の確率で X があると判定される。
- (ii) 良性の X がある人に Y が用いられると、80 % の確率で X があると判定される。
- (iii) X がない人に Y が用いられると、90 % の確率で X がないと正しく判定される。

ある人が、この検査 Y を受けることになった。このとき、次の確率を求めよ。

問 1 この人に X があると判定される確率

問 2 X があると判定されたとき、悪性の X が実際にある確率

問 3 悪性の X が実際にないとき、X がないと判定される確率

問題 2 n を正の整数とし, $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x \sin^2 nx$ とおく. このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 曲線 $y = g(x)$ と x 軸が囲む部分の面積を求めよ.

問 2 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点のうち, 共通の接線をもつすべての点の座標を求めよ.

問 3 問 2 で求めたすべての接点の y 座標の値の平均を A_n とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ.

問題 3 a は実数で $a > 1$ とし, 曲線 $y = \log x$ 上に 2 点 $A(a, \log a)$, $B\left(\frac{1}{a}, \log \frac{1}{a}\right)$

をとる. 直線 AB と曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を S とし, 直線 AB , x 軸, 直線 $x = \frac{1}{a}$ および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を T とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 S, T を a を用いて表せ.

問 2 次の極限値を求めよ. ただし, (3) において必要であれば

$$x > 0 \text{ のとき, } \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい.

$$(1) \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{T} \qquad (2) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{T}{(a-1)^2}$$

$$(3) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{(a-1)^2} \qquad (4) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{T}$$

問 3 $a > 1$ の範囲で, $\frac{S}{T}$ は単調に増加することを示せ.

問 4 $S = T$ となる a が $e^{\frac{3}{2}} < a < e^2$ の範囲に ^{ただ} 1 つあることを示せ. ただし, e は自然対数の底で $e = 2.7182\cdots$ である.

問題 4 $\triangle ABC$ において, $AB=2$, $BC=3$, $CA=\sqrt{7}$ とする. AB に関して C と反対側に点 S を $\triangle ASB$ が正三角形となるようにとる. また, BC に関して A と反対側に点 T を $\triangle BTC$ が正三角形となるようにとる. さらに $\triangle ASB$ の外接円と $\triangle BTC$ の外接円との交点のうち, B と異なる点を P とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 $\angle ABC$ の大きさを求めよ.

問 2 $\triangle PAB \sim \triangle PBC$ であることを示し, AP , BP , CP の長さをそれぞれ求めよ.

問 3 $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ.

