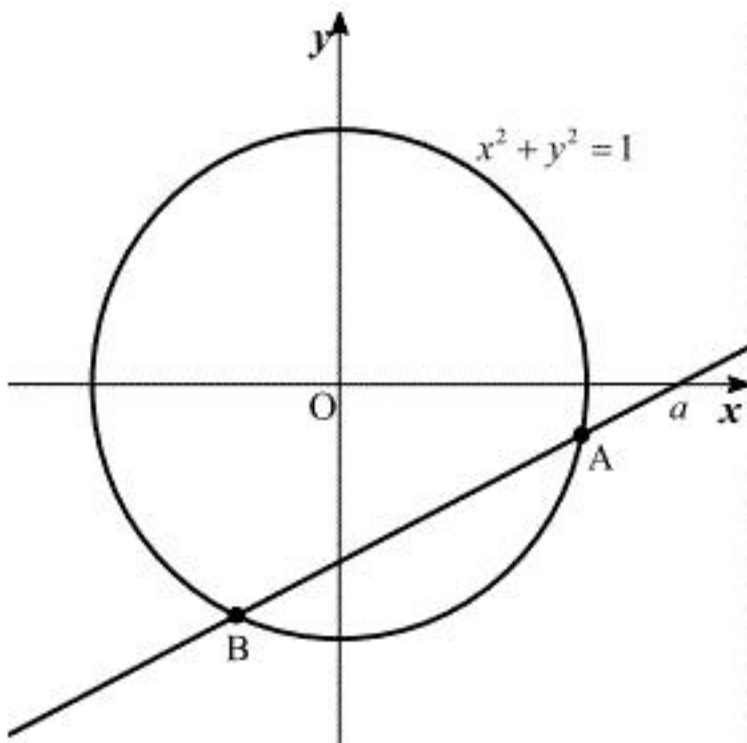


問題 1

問 1



点 $(a, 0)$ を通る傾き m の直線は

$$y = m(x - a) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。①を円の式に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + m^2(x - a)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 - 2m^2ax + m^2a^2 - 1 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。この2次方程式の判別式を D とすると、直線と円は異なる2点で交わるから、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4m^4a^2}{4} - (m^2 + 1)(m^2a^2 - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow m^4a^2 - m^4a^2 + m^2 - m^2a^2 + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow -m^2(a^2 - 1) + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a^2 - 1} &> m^2 \quad (\because a^2 - 1 > 0) \\ \Leftrightarrow |m| &< \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $|m| < \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$

問 2

②の2次方程式を解いて、

$$x = \frac{m^2a \pm \sqrt{1 - m^2(a^2 - 1)}}{m^2 + 1}$$

である。これを①に代入すると、

$$y = \frac{-ma \pm m\sqrt{1 - m^2(a^2 - 1)}}{m^2 + 1} \quad (\text{複号同順})$$

である。線分 AB の中点の座標を (X, Y) とすると、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{m^2a + \sqrt{1 - m^2(a^2 - 1)}}{m^2 + 1} + \frac{m^2a - \sqrt{1 - m^2(a^2 - 1)}}{m^2 + 1} \right\} \\ &= \frac{m^2a}{m^2 + 1} \\ Y &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-ma + m\sqrt{1 - m^2(a^2 - 1)}}{m^2 + 1} + \frac{-ma - m\sqrt{1 - m^2(a^2 - 1)}}{m^2 + 1} \right\} \\ &= -\frac{ma}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。この2式より、 $X = -mY$ である。以下、 m の値について場合分けする。

[1] $m = 0$ のとき

$$X = 0, Y = 0 \text{ である。}$$

[2] $m \neq 0$ のとき

$a \neq 0$ より、 $X > 0, Y \neq 0$ である。したがって、 $m = -\frac{X}{Y}$ となり、これを $X = \frac{m^2a}{m^2 + 1}$ に代入すると、

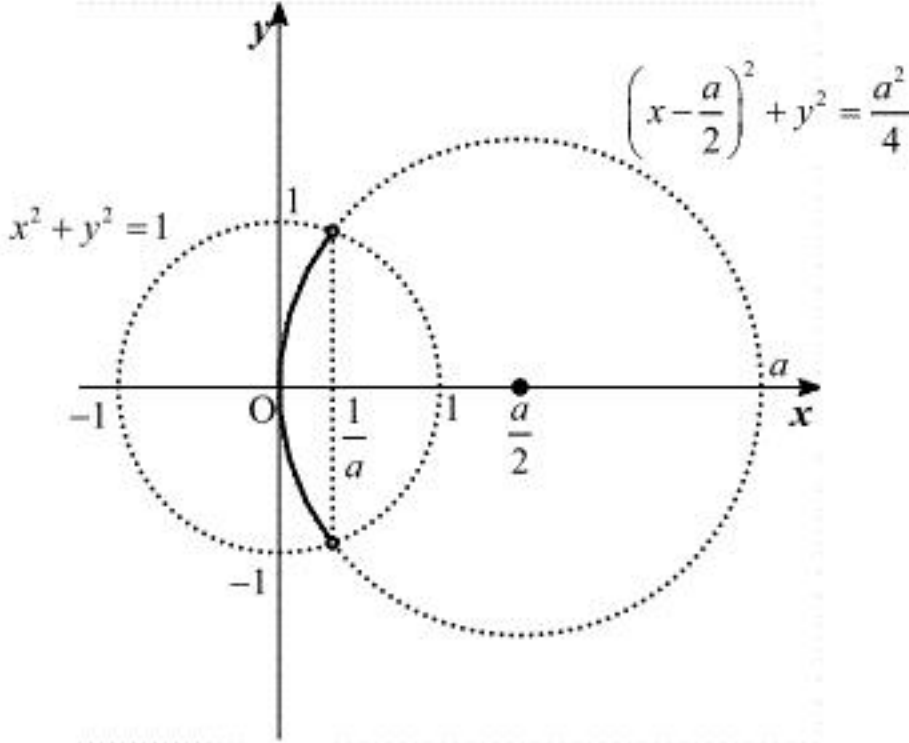
$$\begin{aligned} X &= \frac{\frac{X^2}{Y^2}a}{\frac{X^2}{Y^2} + 1} \\ \Leftrightarrow X \left(\frac{X^2}{Y^2} + 1 \right) &= \frac{X^2}{Y^2}a \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 &= Xa \quad (\because X \neq 0, Y \neq 0) \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{a}{2} \right)^2 + Y^2 &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

となる。線分 AB の中点 (X, Y) は単位円内にあるから、 $X \leq 1$ である。よって、 $a > 1$ より、 $a - X > 0, a^2 - 1 > 0$ となる。また、 $Y = \pm\sqrt{Xa - X^2}$ より、 $m = \frac{-X}{\pm\sqrt{Xa - X^2}}$ となる。これと問 1 より、

$$\begin{aligned} \frac{X}{\sqrt{Xa - X^2}} &< \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (\because X > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{X}{a - X} &< \frac{1}{a^2 - 1} \\ \Leftrightarrow X(a^2 - 1) &< a - X \quad (\because a - X > 0, a^2 - 1 > 0) \\ \Leftrightarrow X &< \frac{1}{a} \end{aligned}$$

となる。よって、 $m \neq 0$ のとき、中点の軌跡は円弧 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \left(0 < x < \frac{1}{a}\right)$ である。

以上[1], [2]より、中点の軌跡は円 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ の $x < \frac{1}{a}$ の部分となる。図示する次図の実線部である。



(答) 円 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ の $x < \frac{1}{a}$ の部分

問題 2

問 1

$f_n(x)$ を微分して,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

となる。さらにこれを微分して,

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-x} \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} (x-n) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f_n'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad f_n''(x) = e^{-x} \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} (x-n)$$

問 2

k を 2 以上の自然数とする。 x が $k-1 < x < k$ の範囲を満たすとする、 $\log x$ は単調増加であるから,

$$\log x < \log k \quad (k-1 < x < k)$$

であり

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k \log x dx &< \int_{k-1}^k \log k dx \\ \Leftrightarrow \int_{k-1}^k \log x dx &< \log k \end{aligned}$$

が成立する。 $k=2, 3, \dots, n$ として両辺の和をとると,

$$\int_1^n \log x dx < \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

となる。

(証明終)

問 3

問 1 より $x \geq 0$ のとき、 $f_n'(x)$ の増減表は次の通りである。

x	0	...	n	...
$f_n''(x)$		-	0	+
$f_n'(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって $f_n'(x)$ ($x > 0$) は $x=n$ で最小値 $f_n'(n) = -e^{-n} \cdot \frac{n^n}{n!}$ をとる。ここで,

$$\log \left| f_n'(n) \right| = -n + n \log n - \sum_{k=1}^n \log k$$

である。問 2 より、 $n \geq 1$ とすると,

$$\int_1^n \log x dx \leq \sum_{k=1}^n \log k$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= \left[x \log x \right]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x \log x - x \right]_1^n \\ &= n \log n - n + 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$n \log n - n - \sum_{k=1}^n \log k \leq -1$$

となる。したがって,

$$\log \left| f_n'(n) \right| \leq -1$$

$$\left| f_n'(n) \right| \leq \frac{1}{e}$$

となる。また、 $x > 0$ で $f_n'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} < 0$ であるから、すべての正の実数 x に対して,

$$-\frac{1}{e} \leq f_n'(x) < 0$$

が成立する。

(証明終)

問題 3

問 1

点 β は 3 点 $0, \alpha, \alpha^2$ を通る円の中心であるから,

$$\begin{aligned} |\beta - \alpha| &= |\beta| \\ \Leftrightarrow |\beta - \alpha|^2 &= |\beta|^2 \\ \Leftrightarrow (\beta - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) &= \beta \overline{\beta} \\ \Leftrightarrow -\beta \overline{\alpha} - \overline{\beta} \alpha + \alpha \overline{\alpha} &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} |\beta - \alpha^2| &= |\beta| \\ \Leftrightarrow |\beta - \alpha^2|^2 &= |\beta|^2 \\ \Leftrightarrow (\beta - \alpha^2)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}^2) &= \beta \overline{\beta} \\ \Leftrightarrow -\beta(\overline{\alpha})^2 - \overline{\beta} \alpha^2 + \alpha^2(\overline{\alpha})^2 &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。① $\times\alpha$ - ②より,

$$\begin{aligned} -\beta \alpha \overline{\alpha} + \beta(\overline{\alpha})^2 + \alpha^2 \overline{\alpha} - \alpha^2(\overline{\alpha})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{\alpha} \{ \beta(\overline{\alpha} - \alpha) + \alpha^2(1 - \overline{\alpha}) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha^2(1 - \overline{\alpha})}{\alpha - \overline{\alpha}} \quad (\because \overline{\alpha} \neq 0, \overline{\alpha} - \alpha \neq 0) \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $\beta = \frac{\alpha^2(1 - \overline{\alpha})}{\alpha - \overline{\alpha}}$

問 2

点 α^3 が C 上にないことを示すことは,

$$\begin{aligned} |\alpha^3 - \beta| &\neq |\beta| \\ \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha^3}{\beta} - 1 \right| &\neq 1 \quad (\because \beta \neq 0) \end{aligned}$$

を示すことと同値である。この式の左辺の 2 乗は

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha^3}{\beta} - 1 \right|^2 &= \left| \frac{\alpha(\alpha - \overline{\alpha})}{1 - \overline{\alpha}} - 1 \right|^2 \\ &= \left| \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1 - \overline{\alpha})}{1 - \overline{\alpha}} \right|^2 \\ &= \frac{|\alpha - 1|^2 |1 + \alpha - \overline{\alpha}|^2}{|\overline{\alpha} - 1|^2} \\ &= |1 + \alpha - \overline{\alpha}|^2 \quad (\because |\alpha - 1| = |\overline{\alpha} - 1|) \\ &= (1 + \alpha - \overline{\alpha})(1 + \overline{\alpha} - \alpha) \\ &= 1 - (\alpha - \overline{\alpha})^2 \end{aligned}$$

と変形でき、ここで α は虚数より $\alpha \neq \overline{\alpha}$ であるため,

$$1 - (\alpha - \overline{\alpha})^2 \neq 1$$

である。よって,

$$\left| \frac{\alpha^3}{\beta} - 1 \right| \neq 1$$

となり、点 α^3 は C 上にない。

(証明終)

問 3

$$\text{「} \frac{\alpha^3}{\beta} \text{ の実部が正」} \Leftrightarrow \frac{\alpha^3}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha^3}{\beta} \right)} > 0$$

である。また,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha^3}{\beta} \right)} &= \frac{\alpha(\alpha - \overline{\alpha})}{1 - \overline{\alpha}} + \frac{\overline{\alpha}(\overline{\alpha} - \alpha)}{1 - \alpha} \\ &= \frac{(\alpha - \overline{\alpha})(\alpha - \alpha^2 - \overline{\alpha} + \overline{\alpha}^2)}{(1 - \overline{\alpha})(1 - \alpha)} \\ &= \frac{(\alpha - \overline{\alpha})^2 \{ 1 - (\alpha + \overline{\alpha}) \}}{|1 - \alpha|^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|1 - \alpha| > 0$ 、 $\alpha - \overline{\alpha}$ は純虚数より $(\alpha - \overline{\alpha})^2 < 0$ であるため、求める条件は,

$$\begin{aligned} 1 - (\alpha + \overline{\alpha}) &< 0 \\ \therefore \alpha + \overline{\alpha} &> 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha + \overline{\alpha} > 1$

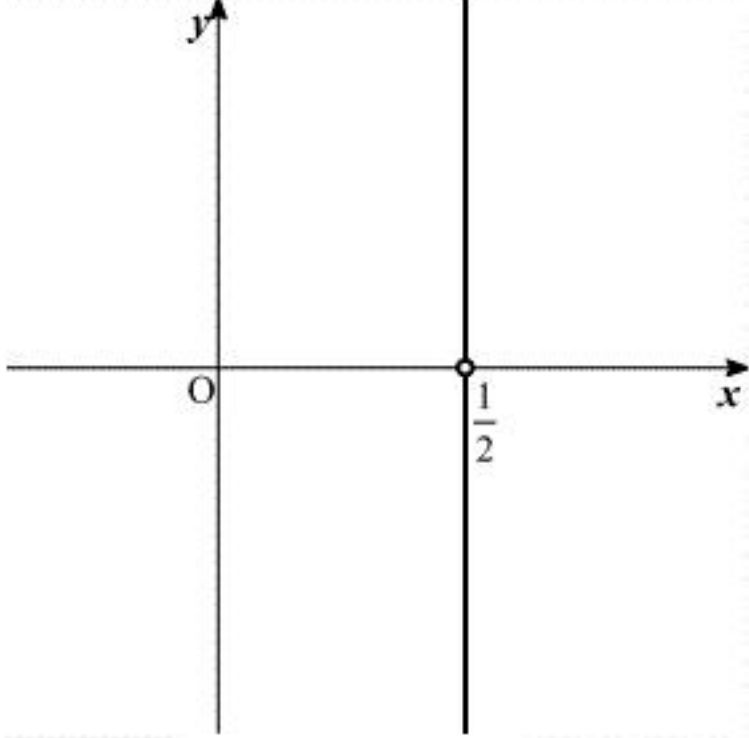
問 4

t が 0 でない実数であるとき、複素数平面上で点 $t\alpha^3$ の集合は、原点と点 α^3 を通る直線のうち原点を除いたものである。0 でないどんな実数 t に対しても、点 $t\alpha^3$ が C 上にないとは、この直線が原点以外に C と交点を持たない、つまりこの直線が C と原点で接することと同値である。このとき点を、 $O(0), A(\alpha^3), B(\beta)$ とおくと、 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ であるため、 $\frac{\alpha^3}{\beta}$ の実部が 0、すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha^3}{\beta} \right)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(\alpha - \overline{\alpha})^2 \{ 1 - (\alpha + \overline{\alpha}) \}}{|1 - \alpha|^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha + \overline{\alpha} &= 1 \quad (\because \alpha \neq \overline{\alpha}) \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\alpha) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。さらに α は虚部が 0 でないから、これを満たす点 α の集合を図示すると、以下のよ

うな点 $\frac{1}{2}$ を通る実軸に垂直な直線から 1 点 $\frac{1}{2}$ を除いたものとなる。



(答) 前図

問題 4

問 1

$n=1, 2, 3, \dots$ において,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n - \frac{1}{4} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}q_n + \frac{1}{4} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるとき, ①+②より,

$$p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となる。よって,

$$p_n + q_n = p_{n-1} + q_{n-1} = \cdots = p_1 + q_1$$

が成立する。

(証明終)

問 2

問 1 より, ①は

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}(p_1 + q_1 - p_n) - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}(p_1 + q_1 - 1) \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{p_1 + q_1 - 1}{3}\right) \end{aligned}$$

と変形できる。ゆえに,

$$\begin{aligned} p_n - \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} &= \left(p_1 - \frac{p_1 + q_1 - 1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} + \left(\frac{2p_1 - q_1 + 1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p_n = \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} + \left(\frac{2p_1 - q_1 + 1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

問 3

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} + \left(\frac{2p_1 - q_1 + 1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right\} \\ &= n \cdot \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} + \frac{2p_1 - q_1 + 1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= n \cdot \frac{p_1 + q_1 - 1}{3} + \frac{4}{9}(2p_1 - q_1 + 1) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

であり, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ が収束するためには

$$\frac{p_1 + q_1 - 1}{3} = 0 \Leftrightarrow p_1 + q_1 = 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

であることが必要である。逆に③を満たしているとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{9}(2p_1 - q_1 + 1) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \right] \\ &= \frac{4}{9}(2p_1 - q_1 + 1) \end{aligned}$$

となり収束する。この和が1であるとき,

$$\frac{4}{9}(2p_1 - q_1 + 1) = 1 \Leftrightarrow 2p_1 - q_1 = \frac{5}{4} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

である。③, ④の2式を解いて, $p_1 = \frac{3}{4}, q_1 = \frac{1}{4}$ となる。

$$\text{(答)} \quad p_1 = \frac{3}{4}, q_1 = \frac{1}{4}$$

問 4

問 3 より, $p_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。また,

$$\sum_{k=1}^n kp_k = 3 \cdot \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

である。ここで, $\sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^k = S_n$ とおくと,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{4}S_n &= 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

となり, これらの辺々を引くと,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}S_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{4}} - n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow S_n &= \frac{4}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} - \frac{1}{3} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4}{9} \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \right)$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} np_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n kp_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3S_n) \\ &= 3 \cdot \frac{4}{9} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{4}{3}$$