

平成 31 年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、4 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1 a は定数で $a > 1$ とし, 点 $(a, 0)$ を通る傾き m の直線と円 $x^2 + y^2 = 1$ と異なる 2 点 A, B で交わる. このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 m の値の範囲を求めよ.

問 2 問 1 で求めた範囲を m が動くとき, 線分 AB の中点の軌跡を求めよ.

問題 2 n を正の整数とし, $f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$ とおく.

このとき, 次の各問いに答えよ.

問 1 第 2 次までの導関数 $f'_n(x)$ と $f''_n(x)$ を求めよ.

問 2 $n \geq 2$ のとき, $\int_1^n \log x \, dx < \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$ が成り立つことを示せ.

問 3 $n \geq 1$ のとき, すべての正の実数 x に対し, $-\frac{1}{e} \leq f'_n(x) < 0$ が成り立つことを示せ.

問題 3 α を、虚部が 0 でない複素数とする。複素数平面上で 3 点 $0, \alpha, \alpha^2$ を通る円を C とし、 C の中心の複素数を β とする。このとき、次の各問いに答えよ。

問 1 β を $\alpha, \bar{\alpha}$ を用いて表せ。

問 2 点 α^3 は C 上にないことを示せ。

問 3 $\frac{\alpha^3}{\beta}$ の実部が正となるとき、 α の満たす条件を求めよ。

問 4 0 でないどんな実数 t に対しても点 $t\alpha^3$ が C 上にないとき、点 α 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

問題 4 2つの数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ は次の漸化式を満たしている.

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n - \frac{1}{4} \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}q_n + \frac{1}{4} \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の各問いに答えよ.

問 1 $p_n + q_n = p_1 + q_1$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.

問 2 一般項 p_n を p_1 , q_1 を用いて表せ.

問 3 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ が収束し、和が1となるように、 p_1 と q_1 の値を定めよ.

問 4 問2, 問3で求めた数列 $\{p_n\}$ について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ.

ただし、 $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることは、証明なしに用いてよい.

