

1

(1)

$y = -x^2 + 6x$ を x で微分すると,

$$y' = -2x + 6$$

となる。接点の x 座標を s としたときの接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y - (-s^2 + 6s) &= (-2s + 6)(x - s) \\ \Leftrightarrow y &= -2(s - 3)x + s^2 \end{aligned}$$

が得られる。これが, 点 $(2, 12)$ を通るから,

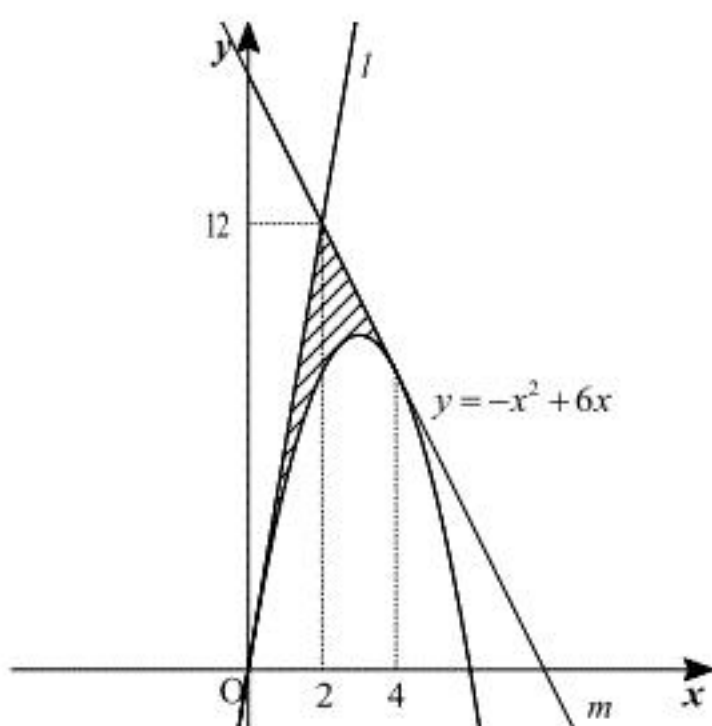
$$\begin{aligned} 12 &= -2(s - 3) \cdot 2 + s^2 \\ \Leftrightarrow s^2 - 4s &= 0 \\ \therefore s &= 0, 4 \end{aligned}$$

となる。 $a < b$ であるから, $a = 0, b = 4$ が得られる。

(答) $a = 0, b = 4$

(2)

求める面積を図示すると以下のようなになる。



上図より, 面積 S は,

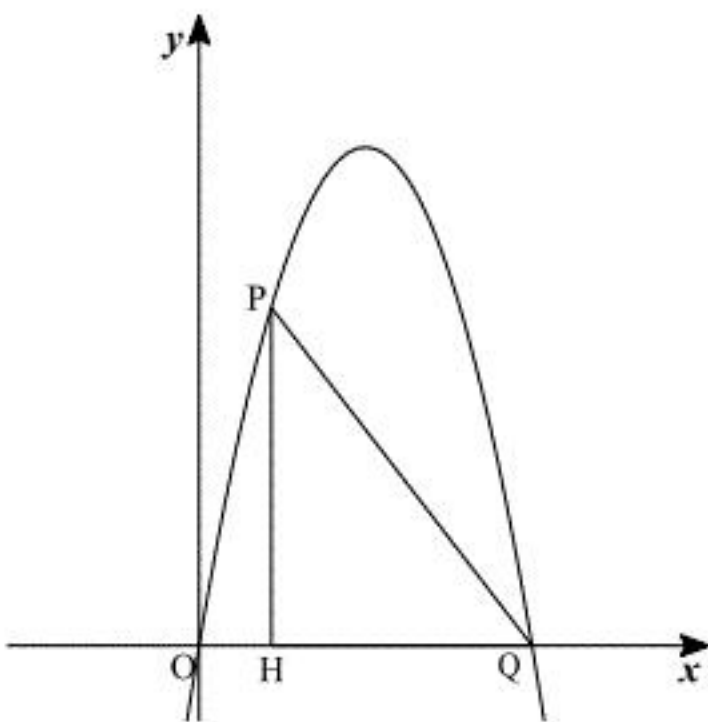
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{6x - (-x^2 + 6x)\} dx + \int_2^4 \{(-2x + 16) - (-x^2 + 6x)\} dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x - 4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} (x - 4)^3 \right]_2^4 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{16}{3}$

(3)

$\triangle PQH$ を図示すると以下のようなになる。



求める面積を S_{PQH} とおくと,

$$\begin{aligned} S_{PQH} &= \frac{1}{2} (6 - t) (-t^2 + 6t) \\ &= \frac{1}{2} (t^3 - 12t^2 + 36t) \end{aligned}$$

となる。これを t で微分すると,

$$\begin{aligned} S'_{PQH} &= \frac{1}{2} (3t^2 - 24t + 36) \\ &= \frac{3}{2} (t - 2)(t - 6) \end{aligned}$$

が得られる。したがって, 増減表は以下のようなになる。

t	0	...	2	...	6
S'_{PQH}		+	0	-	0
S_{PQH}	0	↗	16	↘	0

したがって, S_{PQH} の最大値を与える t は $t = 2$ であり, そのときの値 T は $T = 16$ となる。

(答) 16

(1)

$y = 10^x - 10^{-x+1}$ に関して, $10^x = m$ とおくと,

$$y = m - \frac{10}{m}$$

となる。これを $m > 0$ に注意して変形すると,

$$y = m - \frac{10}{m}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - ym - 10 = 0$$

$$\therefore m = \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2} (\because m > 0)$$

が得られる。したがって,

$$10^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

であり, 両辺の常用対数をとると,

$$x = \log_{10} \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \log_{10} \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

(2)

$y = 10^x - \frac{10}{10^x}$ について, $x = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= 10^0 - \frac{10}{10^0} \\ &= -9 \end{aligned}$$

となり, $x = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= 10^1 - \frac{10}{10^1} \\ &= 9 \end{aligned}$$

となる。

$x \geq 2$ を満たす整数 x において, 10^x の項は整数になるが, $\frac{10}{10^x}$ の項は整数にならない。した

がって, y は整数にはならない。一方, $x \leq -1$ を満たす整数 x において, $\frac{10}{10^x}$ の項は整数にな

るが, 10^x の項は整数にならない。したがって, y は整数にはならない。以上より, x, y がともに整数であるとき, y のとり得る値は ± 9 である。

(答) ± 9

(3)

10^x および $-\frac{10}{10^x}$ はいずれも単調増加であるから, $y = 10^x - \frac{10}{10^x}$ は単調増加である。したがっ

て, $2 \leq x \leq 4$ のとき

$$10^2 - \frac{10}{10^2} \leq y \leq 10^4 - \frac{10}{10^4}$$

$$\Leftrightarrow 99.9 \leq y \leq 9999.999$$

となる。 y は整数であるから,

$$100 \leq y \leq 9999$$

となる。したがって, y のとり得る値の個数は,

$$9999 - 100 + 1 = 9900 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 9900 個

【解答】

ア	3	イ	4	ウ	3	エ	0	オ	3
カ	1	キ	7	ク	3	ケ	1		

【解説】

(1)

点 $(0, 0)$ から点 $(4, 4)$ へ行く方法の場合の数は,

$${}_8C_4 = 70 \text{ (通り)}$$

である。ここで、点 $(0, 0)$ から点 $(2, 2)$ へ移動し、そこから点 $(4, 4)$ へ行く方法の場合の数は,

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、求める場合の数は,

$$70 - 36 = 34 \text{ (通り)}$$

となる。

(2)

x 軸の正の方向への移動を $\rightarrow$ 、 y 軸の正の方向への移動を $\uparrow$ と表記する。点 $(6, 4)$ へちょうど3回曲がって行くとき移動の方法は,

右上右上

上右上右

のいずれかであり、右の部分に $\rightarrow$ を少なくとも1つ、上の部分に $\uparrow$ を少なくとも1つ配置し、合計で $\rightarrow$ を6個、 $\uparrow$ を4個とすればよい。 $\rightarrow$ の振り分け方は5通り、 $\uparrow$ の振り分け方は3通り考えられるため、求める場合の数は,

$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

点 $(0, 0)$ から点 $(3, 5)$ へ行く方法の場合の数は,

$${}_8C_5 = 56 \text{ (通り)}$$

である。ここで、点 $(0, 0)$ から点 $(0, 5)$ へ移動し、そこから点 $(3, 5)$ へ行く方法の場合の数は, 1(通り)

である。点 $(0, 0)$ から点 $(2, 2)$ へ移動し、そこから点 $(3, 5)$ へ行く方法の場合の数は,

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_1 = 24 \text{ (通り)}$$

となる。また、点 $(0, 0)$ から点 $(3, 5)$ へ行くとき、点 $(0, 5)$ と点 $(2, 2)$ をともに通ることはないから、ここで求めた2種類の方法の中に重複するものはない。したがって、求める場合の数は,

$$56 - (1 + 24) = 31 \text{ (通り)}$$

となる。

(4)

点 $(0, 0)$ から点 $(7, 5)$ へ行く方法の場合の数は,

$${}_{12}C_5 = 792 \text{ (通り)}$$

である。点 $(0, 0)$ から点 $(0, 5)$ へ移動し、そこから点 $(7, 5)$ へ行く方法の場合の数は, 1(通り)

である。点 $(0, 0)$ から点 $(4, 0)$ へ移動し、そこから点 $(7, 5)$ へ行く方法の場合の数は,

$$1 \cdot {}_8C_5 = 56 \text{ (通り)}$$

となる。点 $(0, 0)$ から点 $(7, 1)$ へ移動し、そこから点 $(7, 5)$ へ行く方法の場合の数は,

$${}_8C_1 \cdot 1 = 8 \text{ (通り)}$$

となる。また、上記の方法の中で重複しているのは、点 $(0, 0)$ から点 $(4, 0)$ へ移動し、さらに点 $(7, 1)$ へ移動してから点 $(7, 5)$ へ行く場合である。その場合の数は,

$$1 \cdot {}_4C_1 \cdot 1 = 4 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、求める場合の数は,

$$792 - (1 + 56 + 8 - 4) = 731 \text{ (通り)}$$

となる。

(1)

$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k + n^2$ であり, $a_1 = 1$ であるから,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。また, a_3 を求めると,

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 + 2^2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となる。

(答) 7

(2)

$n \geq 2$ において,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + (n-1)^2$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k + n^2$$

である。辺々引いて整理すると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k + n^2 - (n-1)^2 \\ &\Leftrightarrow a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$

(3)

b_{n+1} を考えると, 与えられた式から,

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)$$

が成立する。これに(2)の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= (2a_n + 2n - 1) + 2(n+1) \\ &= (2b_n - 2n - 1) + 2(n+1) \\ &= 2b_n + 1 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $b_{n+1} = 2b_n + 1$

(4)

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める。(3)の結果より, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 1 \\ &\Leftrightarrow b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1) \end{aligned}$$

となるから, 数列 $\{b_n + 1\}$ は公比が 2 の等比数列となる。(1)の結果を利用すると, $b_3 + 1$ は

$$\begin{aligned} b_3 + 1 &= (a_3 + 6) + 1 \\ &= 7 + 6 + 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

となる。よって, $n \geq 3$ において,

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= 14 \cdot 2^{n-3} - 1 \\ &= 7 \cdot 2^{n-2} - 1 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} b_{12} + 1 &= 7 \cdot 2^{12-2} - 1 \\ &= 7167 \end{aligned}$$

が得られる。 $b_{12} = a_{12} + 24$ であるから,

$$a_{12} = 7143$$

となる。

(答) $a_{12} = 7143$