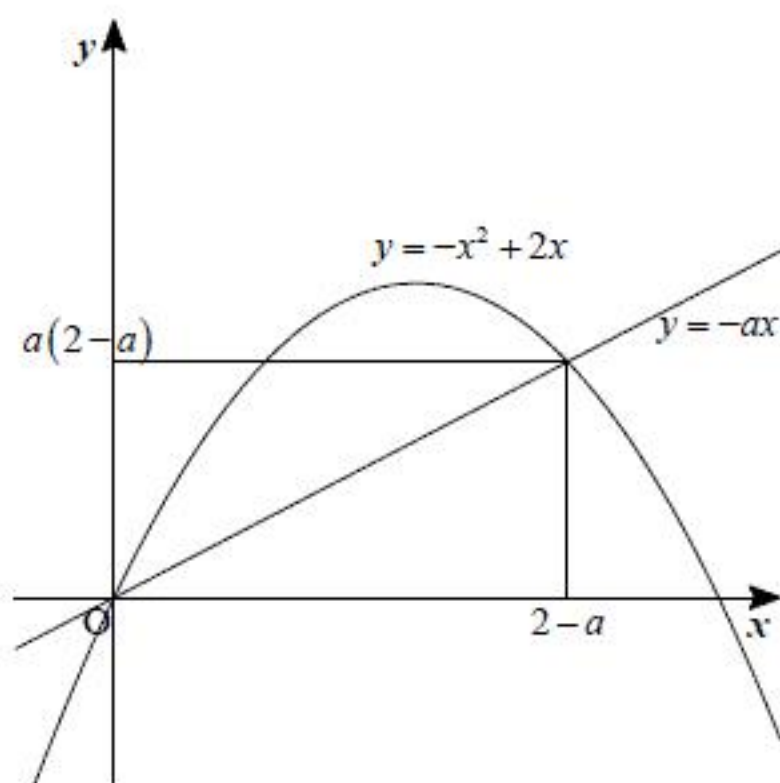


〔解答〕

(2) 1

〔解説〕

図示すると以下のようなになる。



放物線と直線で囲まれた面積が、放物線と x 軸で囲まれた面積の $\frac{1}{8}$ であるから、

$$\int_0^{2-a} \{(-x^2 + 2x) - ax\} dx = \frac{1}{8} \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(2-a)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3$$

$$\Leftrightarrow (2-a)^3 = 1$$

が得られる。 $(2-a)$ は実数であるから、

$$(2-a)^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2-a=1$$

$$\therefore a=1$$

となり、これは $0 < a < 2$ を満たしている。

[解答]

$$(3) \quad \frac{1}{3} \log 10$$

[解説]

まず、部分分数を考える。被積分関数を、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x-2x^2} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)(1+2x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+2x} \end{aligned}$$

とおく。この式の両辺に、 $(1-x)(1+2x)$ をかけると、

$$\begin{aligned} 1 &= a(1+2x) + b(1-x) \\ \Leftrightarrow (2a-b)x + (a+b-1) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。これは、 x についての恒等式であるから、係数を比較すると、

$$\begin{cases} 2a-b=0 \\ a+b-1=0 \end{cases}$$

となる。これを解くと、

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$$

が得られる。したがって、定積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x-2x^2} dx &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[-\log|1-x| + \frac{2}{2} \log|1+2x| \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(-\log \frac{2}{3} + \log \frac{5}{3} \right) - \left(-\log \frac{4}{3} + \log \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \log \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \log 10 \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(1) 3

[解説]

 $f(x)$ を変形すると,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos x (3 \cos x + \sin^2 x) \\
 &= \cos x (3 \cos x + 1 - \cos^2 x) \\
 &= -\cos^3 x + 3 \cos^2 x + \cos x
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)とおくと,

$$g(t) = -t^3 + 3t^2 + t$$

が得られる。 $g(t)$ を t で微分すると,

$$g'(t) = -3t^2 + 6t + 1$$

となる。 $g'(t) = 0$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 -3t^2 + 6t + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 1 &= 0 \\
 \therefore t &= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\alpha = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$, $\beta = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ とおくと,

$$-1 < \alpha < 1 < \beta$$

であるから、 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(1)$

ここで、 $g(1)$, $g(-1)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 g(1) &= -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(-1) &= -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

となるから、最大値は3となる。

[解答]

$$(3) \quad \frac{1+\log 2}{2}$$

[解説]

関数 $f(x)$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 1}{x} \\ &= \frac{2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{x} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $f(x)$ ($x > 0$) の増減表は以下ようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$

したがって、最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \log \sqrt{2} \\ &= \frac{1+\log 2}{2} \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(2) 11

[解説]

(m, n) の組み合わせの総数を求めると、 $m = k (k = 1, 2, \dots, 5)$ とおくとき、 n は $n = 1, 2, \dots, 6 - k$ の $(6 - k)$ 通りの値をとることができるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (6 - k) &= \sum_{k=1}^5 k \\ &= \frac{5 \cdot 6}{2} \\ &= 15\end{aligned}$$

となる。これらの組み合わせのうち、 $\frac{n}{m}$ が約分できるのは、

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}$$

の 4 通りである。これらは重複するため、求める要素の個数は、

$$15 - 4 = 11$$

となる。

[解答]

(2) 1534

[解説]

$P_n(x) = p_n x^{a_n} + Q_n(x)$ とおく。ただし、 $Q_n(x)$ は高々 $(a_n - 1)$ 次式であり、 $p_n \neq 0$ であるとする。

このとき、 $P_n(t^2) = p_n t^{2a_n} + Q_n(t^2)$ に関して、 $Q_n(t^2)$ は高々 $2(a_n - 1)$ 次式であり、

$tP_n(t^2) = p_n t^{2a_n+1} + tQ_n(t^2)$ に関して、 $tQ_n(t^2)$ は高々 $(2a_n - 1)$ 次式である。ここで、 $P_{n+1}(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \int_x^{2x} tP_n(t^2) dt \\ &= \int_x^{2x} \{p_n t^{2a_n+1} + tQ_n(t^2)\} dt \\ &= \left[\frac{p_n}{2a_n+2} t^{2a_n+2} + R_n(t) \right]_x^{2x} \\ &= \frac{p_n}{2a_n+2} (2^{2a_n+2} - 1) x^{2a_n+2} + \{R_n(2x) - R_n(x)\} \end{aligned}$$

となる。 $R_n(t)$ は高々 $2a_n$ 次式であるから、 $\{R_n(2x) - R_n(x)\}$ の項は高々 $2a_n$ 次式である。ここ

で、 $p_n \neq 0$ 、 $2a_n + 2 \neq 0$ であるから、 $P_{n+1}(x)$ は $2a_n + 2$ 次式である。以上より、

$$a_{n+1} = 2a_n + 2$$

という漸化式が得られ、これを变形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 2 &= 2(a_n + 2) \end{aligned}$$

となる。以上より、数列 $\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 3$ 、公比 2 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} a_n + 2 &= 3 \cdot 2^{n-1} \\ \therefore a_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 a_{10} の値は、

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 \cdot 2^{10-1} - 2 \\ &= 3 \cdot 512 - 2 \\ &= 1534 \end{aligned}$$

となる。

[解答]

$$(4) \quad e^{-2}$$

[解説]

$h \rightarrow +0$ のときを考える。 $\lim_{h \rightarrow +0} (1-2h)^{\frac{1}{h}}$ について、 $2h = \frac{1}{x}$ とおいて変形する。 $h \rightarrow +0$ のとき

$x \rightarrow \infty$ だから、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} (1-2h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \right\}^{\frac{2x}{x-1}} \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

となる。次に、 $h \rightarrow -0$ のときを考える。 $\lim_{h \rightarrow -0} (1-2h)^{\frac{1}{h}}$ について、 $-2h = \frac{1}{x}$ とおいて変形する。

$h \rightarrow -0$ のとき $x \rightarrow \infty$ だから、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow -0} (1-2h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\}^{-2} \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

[解答]

$$(4) \quad x+1$$

[解説]

題意より、 $P(x) = (x-2)Q(x) + 3$ とおける。ここで、 $P(P(x))$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= \{P(x) - 2\}Q(P(x)) + 3 \\ &= \{(x-2)Q(x) + 1\}Q(P(x)) + 3 \\ &= (x-2)Q(x)Q(P(x)) + Q(P(x)) + 3 \end{aligned}$$

となる。 $P(P(x))$ を $x-2$ で割った余りは 4 であるから、

$$\begin{aligned} P(P(2)) &= 4 \\ \Leftrightarrow Q(P(2)) + 3 &= 4 \\ \Leftrightarrow Q(3) &= 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $P(x) = (x-2)(x-3)R(x) + a(x-2) + b$ とおくと、 $Q(x) = (x-3)R(x) + a$ である。 $Q(3) = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} Q(3) &= a \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

が得られ、 $P(2) = 3$ であるから、

$$\begin{aligned} P(2) &= b \\ \Leftrightarrow b &= 3 \end{aligned}$$

が得られる。以上より、 $P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りは、

$$x-2+3 = x+1$$

となる。

[解答]

(1) 24

[解説]

X, Y, Z を $\bigcirc$ と表記して、 W 同士が隣り合わない並べ方を考えると、

$$\bigcirc W \bigcirc W \bigcirc W$$
$$W \bigcirc W \bigcirc W \bigcirc$$
$$W \bigcirc \bigcirc W \bigcirc W$$
$$W \bigcirc W \bigcirc \bigcirc W$$

の 4 通りとなる。 $\bigcirc$ の中に X, Y, Z を入れればよいから、求める場合の数は、

$$4 \cdot 3! = 24 (\text{通り})$$

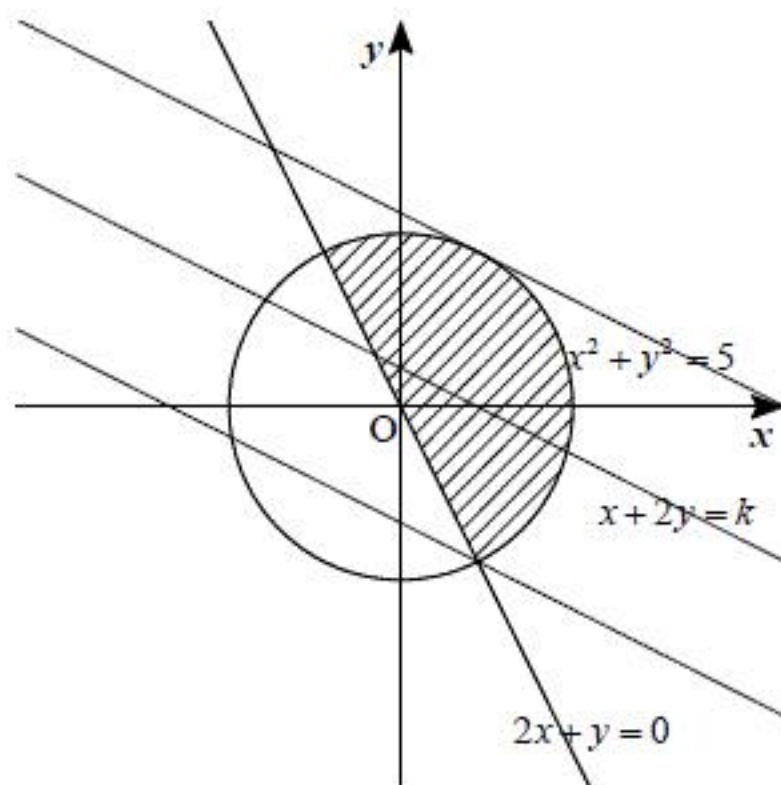
となる。

[解答]

(2) -3

[解説]

領域を図示すると、以下のようになる。ただし、境界線を含む。



$x + 2y = k$ とおく。 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ と変形できるから、 k が最小となるのは、直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ の

y 切片が最小となるときである。このとき、直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ は、円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線

$2x + y = 0$ の第 4 象限上にある交点を通る。この交点の座標は、

$$x^2 + (-2x)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

より、第 4 象限の点であることに注意すると、 $(x, y) = (1, -2)$ である。したがって、求める k の最小値は、

$$\begin{aligned} k &= 1 + 2(-2) \\ &= -3 \end{aligned}$$

となる。

$y = |(x-2)(x-4)|$ の絶対値を外すと,

$$y = \begin{cases} (x-2)(x-4) & (x \leq 2, 4 \leq x) \\ -(x-2)(x-4) & (2 < x < 4) \end{cases}$$

となる。したがって、定積分を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^4 |(x-2)(x-4)| dx &= \int_0^2 (x-2)(x-4) dx + \int_2^4 -(x-2)(x-4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \right]_0^2 + \frac{1}{6}(4-2)^3 \\ &= \frac{8}{3} - 12 + 16 + \frac{4}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

3 次方程式が虚数 $1-i$ を解に持つとき、共役な複素数である $1+i$ も解に持つ。実数解を α とおくと、解と係数の関係から、

$$(1-i) + (1+i) + \alpha = 5$$

$$\therefore \alpha = 3$$

となる。

(答) 3

3 点をそれぞれ $A(1, 3)$, $B(7, 5)$, $C(a, 4)$ とすると, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ はそれぞれ,

$$\overrightarrow{AB} = (6, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (a-1, 1)$$

となる。三角形 ABC の面積を S とおくと, S はこれらのベクトルを用いて,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

と書ける。 $|\overrightarrow{AB}|^2$, $|\overrightarrow{AC}|^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ をそれぞれ計算すると,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 40$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = a^2 - 2a + 2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6a - 4$$

であるから, a が正の数であることに注意すると,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{1}{2} \sqrt{40(a^2 - 2a + 2) - (6a - 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 10 = \sqrt{4a^2 - 32a + 64}$$

$$\Leftrightarrow 100 = 4a^2 - 32a + 64$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-9)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = 9$$

となる。

計算過程で出てくる実数部を A と表す。与えられた複素数の分母と分子にそれぞれ $11+7i$ をかけると、

$$\begin{aligned}\frac{164-58i}{11-7i} &= \frac{(164-58i)(11+7i)}{(11-7i)(11+7i)} \\ &= \frac{A+(164 \cdot 7-58 \cdot 11)i}{121+49} \\ &= \frac{A}{170} + \frac{510}{170}i \\ &= \frac{A}{170} + 3i\end{aligned}$$

となる。したがって、求める虚部の値は3である。

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるとする。 $\vec{a} - 3\vec{b} = k(\vec{a} + 2\vec{b}) + l(2\vec{a} + \vec{b})$ となる実数 k, l を求めると,

$$\begin{aligned}\vec{a} - 3\vec{b} &= k(\vec{a} + 2\vec{b}) + l(2\vec{a} + \vec{b}) \\ \Leftrightarrow \vec{a} - 3\vec{b} &= (k + 2l)\vec{a} + (2k + l)\vec{b}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、係数を比較すると,

$$\begin{cases} k + 2l = 1 \\ 2k + l = -3 \end{cases}$$

となり, これを解くと $(k, l) = \left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$ が得られる。したがって,

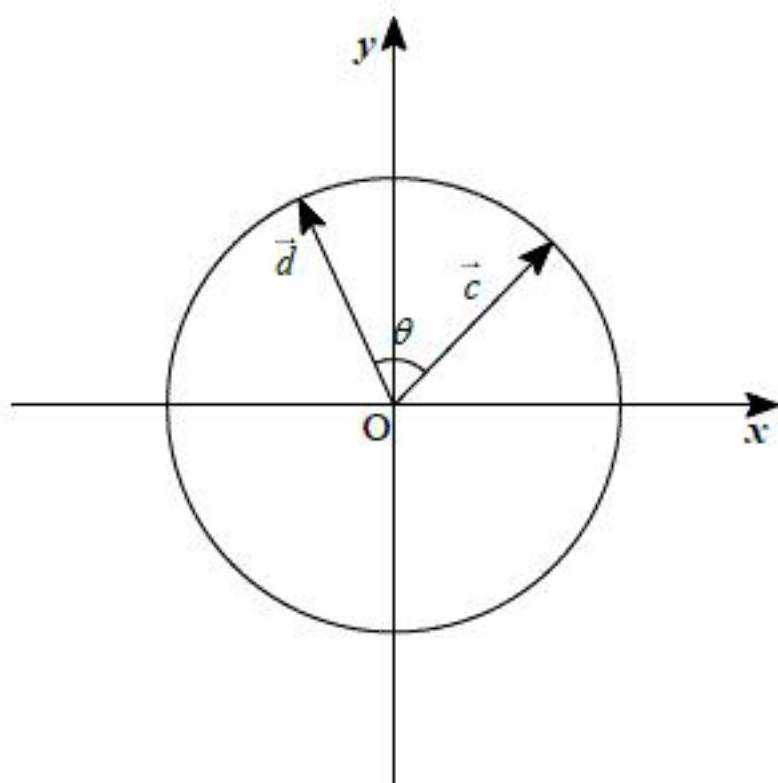
$$\vec{a} - 3\vec{b} = -\frac{7}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{5}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$$

が成立している。これは $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立でない場合でも成立する。ここで,

$$\begin{cases} \vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} \end{cases}$$

とおくと, $|\vec{c}| = 1, |\vec{d}| = 1$ である場合について, $\left|-\frac{7}{3}\vec{c} + \frac{5}{3}\vec{d}\right|$ のとり得る値の最大値を求めればよ

いことがわかる。 $|\vec{c}| = 1, |\vec{d}| = 1$ であるから, $\vec{c}, \vec{d}$ は以下のように図示できる。ただし, 図のように $\vec{c}, \vec{d}$ のなす角を θ とおく。



このとき, $\vec{c}, \vec{d}$ の内積は,

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{d} &= |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

となる。ここで, $|-7\vec{c} + 5\vec{d}|$ の2乗を考えると,

$$\begin{aligned}|-7\vec{c} + 5\vec{d}|^2 &= 49|\vec{c}|^2 - 70\vec{c} \cdot \vec{d} + 25|\vec{d}|^2 \\ &= 74 - 70\cos \theta\end{aligned}$$

より, $|-7\vec{c} + 5\vec{d}|^2$ は $\cos \theta = -1$ のとき最大値144をとる。このとき,

$$\begin{aligned}|-7\vec{c} + 5\vec{d}| &= 12 \\ \Leftrightarrow |\vec{a} - 3\vec{b}| &= \left|-\frac{7}{3}\vec{c} + \frac{5}{3}\vec{d}\right| = 4\end{aligned}$$

となるから, $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ のとり得る値の最大値は4である。