

1

(1)

$f(x) = -x^2 + 6x$ とおく。これを両辺 x で微分すると

$$f'(x) = -2x + 6$$

となる。放物線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線 l_t の方程式は

$$l_t: y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

とおける。これが点 $(2, 12)$ を通るとき

$$12 = f'(t)(2 - t) + f(t)$$

$$\Leftrightarrow 12 = (-2t + 6)(2 - t) + (-t^2 + 6t)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0, 4$$

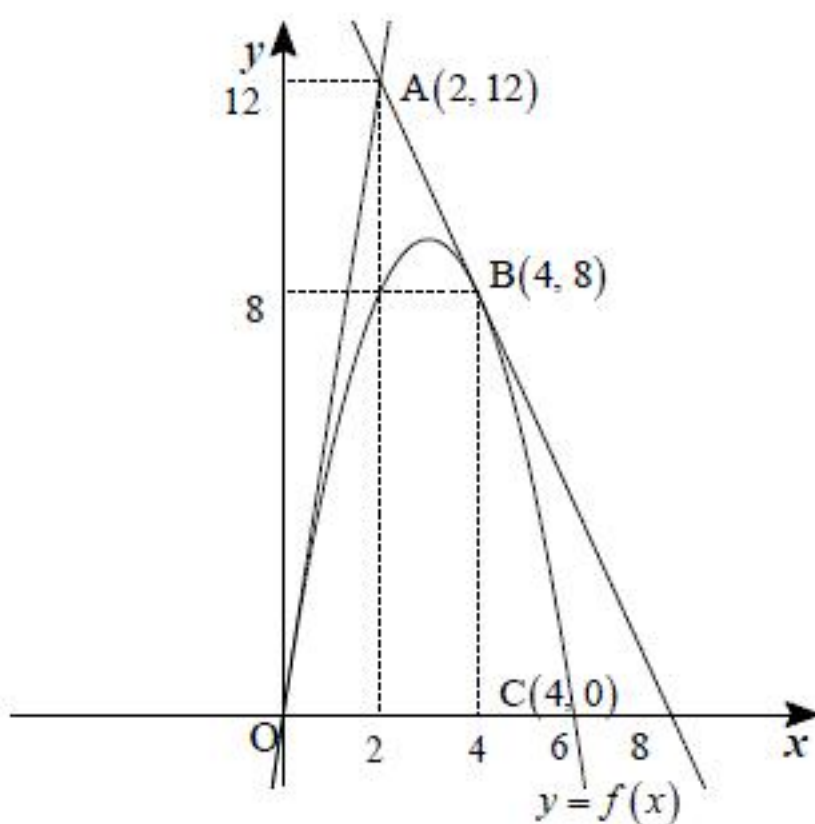
となる。よって、点 $(2, 12)$ から放物線 C に引いた 2 本の接線と放物線の接点の x 座標 a, b は $0, 4$ となり、 $a < b$ であることより

$$a = 0, b = 4$$

となる。

(答) $a = 0, b = 4$

(2)



グラフは上図のようになり、3 点 A, B, C を図のようにおくと、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \text{OABC} - \int_0^4 (-x^2 + 6x) dx \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot (12 + 8) \cdot 2 \right\} - \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{16}{3}$

(3)

$0 < t < 6$ のもとで $\triangle PHQ$ の面積を $g(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} \cdot PH \cdot QH \\ &= \frac{1}{2} (-t^2 + 6t)(6 - t) \\ &= \frac{1}{2} (t^3 - 12t^2 + 36t) \end{aligned}$$

となる。これを両辺 t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2} (3t^2 - 24t + 36) \\ &= \frac{3}{2} (t - 2)(t - 6) \end{aligned}$$

が得られるから、増減表は以下のようになる。

t	0	...	2	...	6
$g'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
$g(t)$	$\nearrow$	$\nearrow$	16	$\searrow$	$\searrow$

よって、 $\triangle PHQ$ の面積 $g(t)$ は $t = 2$ のとき最大値 $T = 16$ をとる。

(答) $T = 16$ ($t = 2$ のとき)

(1)

$10^x = X$ とおくと、 $10^x > 0$ より $X > 0$ である。このとき、

$$y = 10^x - 10^{-x+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow y = X - \frac{10}{X} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $X > 0$ であるから、両辺に X をかけると

$$Xy = X^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow X^2 - yX - 10 = 0$$

となり、これを X について解くと、 $X > 0$, $\sqrt{y^2 + 40} > |y|$ であることより

$$X = \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

となる。これより

$$10^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{10} \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \log_{10} \frac{y + \sqrt{y^2 + 40}}{2}$$

(2)

x, y がともに整数であるとき、 $y, X (= 10^x)$ はともに整数であるから、②より、 $\frac{10}{X}$ も整数で

なければならない。すなわち、 $X (= 10^x)$ は 10 の約数である必要があり、これを満たすのは

$x = 0, 1$ のときのみである。①より $x = 0$ のとき $y = -9$ 、 $x = 1$ のとき $y = 9$ となることから、 y のとり得る値は ± 9 である。

(答) ± 9

(3)

式②の両辺を X で微分すると

$$\frac{dy}{dX} = 1 + \frac{10}{X^2} > 0$$

であり、 y は X の単調増加関数であると分かる。また、 X は $X = 10^x$ より x の単調増加関数であることから、 y は x の単調増加関数となる。 $2 \leq x \leq 4$ であるとき

$$10^2 - 10^{-2+1} \leq y \leq 10^4 - 10^{-4+1}$$

$$\Leftrightarrow 10^2 - \frac{1}{10} \leq y \leq 10^4 - \frac{1}{10^3}$$

となる。この値の範囲を満たす整数 y は、 $10^2, 10^2 + 1, \dots, 10^4 - 1$ があり、これらは全部で

$(10^4 - 1) - 10^2 + 1 = 9900$ 個ある。

(答) 9900 個

【解答】

- (1) ア 3 イ 4
 (2) ウ 3 エ 0
 (3) オ 3 カ 1
 (4) キ 7 ク 3 ケ 1

【解説】

- (1) 原点(0, 0)から点(4, 4)へ行く方法の総数は

$$\frac{8!}{4!4!} = 70 \text{ (通り)}$$

あり、原点(0, 0)から点(2, 2)を通り点(4, 4)へ行く方法の総数は

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 36 \text{ (通り)}$$

ある。したがって、原点(0, 0)から点(2, 2)を通らずに点(4, 4)へ行く方法の総数は
 $70 - 36 = 34$ (通り)

である。

- (2) 原点(0, 0)から点(6, 4)へちょうど3回曲がって行く方法には

[1] $(0, 0) \rightarrow (k, 0) \rightarrow (k, l) \rightarrow (6, l) \rightarrow (6, 4)$ と移動する場合

[2] $(0, 0) \rightarrow (0, l) \rightarrow (k, l) \rightarrow (k, 4) \rightarrow (6, 4)$ と移動する場合

の2つの場合がある。ただし、 k, l は $1 \leq k \leq 5, 1 \leq l \leq 3$ を満たす整数である。

[1] $(0, 0) \rightarrow (k, 0) \rightarrow (k, l) \rightarrow (6, l) \rightarrow (6, 4)$ と移動する場合

k の選び方が5通り、 l の選び方が3通りあるから、移動方法の数は
 $5 \times 3 = 15$ (通り)

ある。

[2] $(0, 0) \rightarrow (0, l) \rightarrow (k, l) \rightarrow (k, 4) \rightarrow (6, 4)$ と移動する場合

k の選び方が5通り、 l の選び方が3通りあるから、移動方法の数は
 $5 \times 3 = 15$ (通り)

ある。

以上[1], [2]より、求める場合の数は

$$15 + 15 = 30 \text{ (通り)}$$

である。

- (3) 原点(0, 0)から点(3, 5)へ行く方法の総数は

$$\frac{8!}{3!5!} = 56 \text{ (通り)}$$

ある。原点(0, 0)から点(2, 2)を通り点(3, 5)へ行く方法の総数は

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{1!3!} = 24 \text{ (通り)}$$

ある。また、原点(0, 0)から点(0, 5)を通り点(3, 5)へ行く方法の総数は
 1 (通り)

ある。原点(0, 0)から点(3, 5)へ行く場合に点(2, 2)と点(0, 5)を両方通る方法は存在しないことから、求める場合の数は

$$56 - (24 + 1) = 31 \text{ (通り)}$$

である。

- (4) 原点(0, 0)から点(7, 5)へ行く方法の総数は

$$\frac{12!}{5!7!} = 792 \text{ (通り)}$$

ある。原点(0, 0)から点(0, 5)を通り点(7, 5)へ行く方法の総数は

$$1 \text{ (通り)}$$

あり、原点(0, 0)から点(4, 0)を通り点(7, 5)へ行く方法の総数は

$$\frac{8!}{3!5!} = 56 \text{ (通り)}$$

あり、原点(0, 0)から点(7, 1)を通り点(7, 5)へ行く方法の総数は

$$\frac{8!}{7!1!} = 8 \text{ (通り)}$$

ある。また、原点(0, 0)から点(4, 0)と点(7, 1)を通り点(7, 5)へ行く方法の総数は

$$\frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ (通り)}$$

あるが、原点(0, 0)から点(7, 5)へ行く場合に点(0, 5), (4, 0), (7, 1)のうち(4, 0), (7, 1)以外の2点以上の組合せを同時に通る方法はない。したがって、求める場合の数は

$$792 - (1 + 56 + 8 + 4) = 731 \text{ (通り)}$$

となる。

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k + n^2 \quad (n \geq 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

をみたす。

(1)

①に $n=1$ を代入して

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{k=1}^1 a_k + 1^2 \\ &= a_1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$n=2$ を代入して

$$\begin{aligned} a_3 &= \sum_{k=1}^2 a_k + 2^2 \\ &= a_1 + a_2 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a_3 = 7$

(2)

①より

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + (n-1)^2 \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②の辺々を引いて、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n + (2n-1) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n + (2n-1) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $a_{n+1} = 2a_n + (2n-1)$

(3)

$n \geq 1$ において $b_n = a_n + 2n$ とおくとき

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - 2n \\ a_{n+1} &= b_{n+1} - 2(n+1) \end{aligned}$$

である。これらを③に代入して

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 2(n+1) &= 2(b_n - 2n) + (2n-1) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n + 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $b_{n+1} = 2b_n + 1$

(4)

④を変形すると

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

となるから、 $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= 2^{n-2} (b_2 + 1) \\ &= 7 \cdot 2^{n-2} \\ \therefore b_n &= 7 \cdot 2^{n-2} - 1 \end{aligned}$$

となる。これを $a_n = b_n - 2n$ に代入すると

$$a_n = 7 \cdot 2^{n-2} - 1 - 2n \quad (n \geq 2)$$

となる。 $n=12$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_{12} &= 7 \cdot 2^{12-2} - 1 - 24 \\ &= 7143 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $a_{12} = 7143$

(1)

関数 $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ について

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{0-0}{1+0} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(2)

(1)と同様にして

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{0-0}{1+0} \\ &= 0\end{aligned}$$

である。関数 $f(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3(x^2+1) - 2x(3x-4)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

となる。 $(x^2+1)^2 > 0$ であることを考慮して、増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

したがって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ であることも考慮して、 $f(x)$ は $x=3$ のとき最大値

$M = \frac{1}{2}$ をとり、 $x = -\frac{1}{3}$ のとき最小値 $m = -\frac{9}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad a=3, M=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{3}, m=-\frac{9}{2}$$