

(注意) 解答用紙に途中の計算を明記せよ。解答枠の用意されている設問については枠内に解答を記入せよ。

1 放物線 $y = -x^2 + 6x$ について、次の間に答えよ。

- (1) 点 $(2, 12)$ から放物線に引いた 2 本の接線を l, m とする。 l, m と放物線の接点の x 座標 a, b を求めよ。ただし、 $a < b$ とする。
- (2) (1) における 2 本の接線 l, m と放物線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。
- (3) $0 < t < 6$ とする。放物線上に点 $P(t, -t^2 + 6t)$ と点 $Q(6, 0)$ をとり、 P から x 軸に垂線 PH を下ろす。このとき、 $\triangle PQH$ の面積を最大にする t の値と面積の最大値 T を求めよ。

2 実数 x, y が

$$y = 10^x - 10^{-x+1}$$

という関係を満たすとき、次の間に答えよ。

- (1) x を y の式で表せ。
- (2) x, y がともに整数であるとき、 y のとり得る値をすべて求めよ。
- (3) x が $2 \leq x \leq 4$ を満たす実数で、 y は整数であるとき、 y のとり得る値は全部で何個あるか。

3 xy 平面上を点 $P(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ から出発して、

「 (x, y) からは $(x+1, y)$ か $(x, y+1)$ へ移動する」

という条件を満たしながら動く。このとき、次のアからケにあてはまる 0 から 9 までの数字を答えよ。

- (1) 点 $(2, 2)$ を通らずに点 $(4, 4)$ へ行く方法は アイ 通りである。
- (2) 点 $(6, 4)$ へちょうど 3 回曲がって行く方法は ウエ 通りである。
- (3) 点 $(2, 2)$ も点 $(0, 5)$ も通らずに点 $(3, 5)$ へ行く方法は オカ 通りである。
- (4) 点 $(0, 5)$ も点 $(4, 0)$ も点 $(7, 1)$ も通らずに点 $(7, 5)$ へ行く方法は キクケ 通りである。

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k + n^2 \quad (n \geq 1)$$

で定めるとき、次の間に答えよ。

- (1) a_3 の値を求めよ。
- (2) a_{n+1} ($n \geq 2$) を a_n と n の式で表せ。
- (3) $b_n = a_n + 2n$ ($n \geq 1$) とおくと、 b_{n+1} ($n \geq 2$) を b_n と n の式で表せ。
- (4) a_{12} の値を求めよ。