1

(1)

$$f(\theta)=4\left(\sin^2\theta+\cos\theta\right)$$

について，$\cos\theta=x$ とおくと，

$$f(\theta)=4\left(1-\cos^2\theta+\cos\theta\right)$$
$$=-4\left(x^2-x-1\right)$$

とかける。

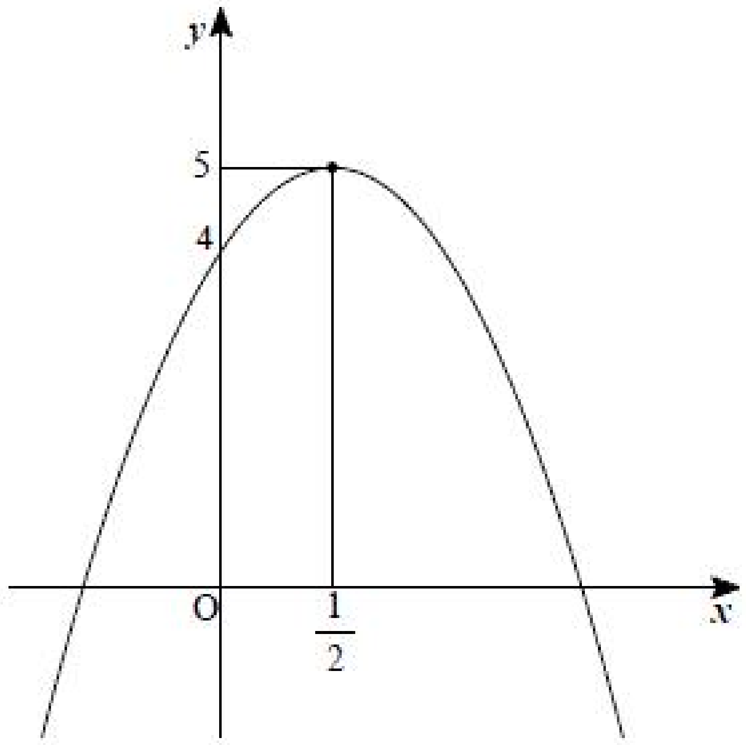
(答) $f(\theta)=-4\left(x^2-x-1\right)$

(2)

$g(x)=-4\left(x^2-x-1\right)$ とおくと

$$g(x)=-4\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}$$
$$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5$$

となる。$y=g(x)$ のグラフは下図のようになる。



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ である。よって，$f(\theta)\left(=g(x)\right)$ の最大値 M_1，最小値 m_1 は

$$M_1=5\ (x=\frac{1}{2}\text{ つまり }\theta=\frac{\pi}{3}\text{ のとき})$$

$$m_1=4\ (x=1\text{ つまり }\theta=0\text{ のとき})$$

となる。

(答) $M_1=5,\ m_1=4$

(3)

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $-1\leqq x\leqq 0$ である。よって，$f(\theta)\left(=g(x)\right)$ の最大値 M_2，最小値 m_2 は

$$M_2=4\ (x=0\text{ つまり }\theta=\frac{\pi}{2}\text{ のとき})$$

$$m_2=-4\ (x=-1\text{ つまり }\theta=\pi\text{ のとき})$$

となる。

(答) $M_2=4,\ m_2=-4$

$\boxed{2}$

$$||x-9|-1| \leqq 2 \qquad \cdots ①$$

$$|x-4| \leqq k \qquad \cdots ②$$

(1)

①について

$$||x-9|-1| \leqq 2$$

$\Leftrightarrow -2 \leqq |x-9|-1 \leqq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leqq |x-9|$ かつ $|x-9| \leqq 3$

$\Leftrightarrow |x-9| \leqq 3$

$\Leftrightarrow -3 \leqq x-9 \leqq 3$

$\Leftrightarrow 6 \leqq x \leqq 12 \qquad \cdots ③$

となる。

(答) $6 \leqq x \leqq 12$

(2)

k が正であるもとで，②は

$|x-4| \leqq k$

$\Leftrightarrow -k \leqq x-4 \leqq k$

$\Leftrightarrow 4-k \leqq x \leqq k+4 \qquad \cdots ④$

となる。①，②をともに満たす実数が存在するのは，③，④が共通範囲をもつときである。③と④が共通範囲を持たないのは

$k+4<6$ または $12<4-k$

$\Leftrightarrow k<2$ または $k<-8$

$\Leftrightarrow k<2$

のときである。よって，③，④が共通範囲をもつのは $k>0$ であることも考慮して，$k \geqq 2$ のときである。

(答) $k \geqq 2$

(3)

①の解が②の解に含まれるのは，③が④の範囲に含まれるときである。よって，

$4-k \leqq 6$ かつ $12 \leqq k+4$

$\Leftrightarrow k \geqq -2$ かつ $k \geqq 8$

$\Leftrightarrow k \geqq 8$

のときである。

(答) $k \geqq 8$

$\boxed{3}$

(1)

点 F は線分 BE と CD の交点であることから，線分 BE と CD 上に存在する。よって，実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AF} = s\overrightarrow{AE} + (1-s)\overrightarrow{AB}$$

$$= (1-s)\overrightarrow{AB} + 2s\overrightarrow{AC} \ \left(\because \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}\right) \quad \cdots ①$$

$$\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AD}$$

$$= 3(1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \ \left(\because \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}\right) \quad \cdots ②$$

と表せる。$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は互いに一次独立なベクトルであることから，

$$\begin{cases} 1-s = 3(1-t) \\ 2s = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{2}{5}, t = \frac{4}{5}$$

となる。以上より

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

となるから，$\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ とするとき，$m = \frac{3}{5}, n = \frac{4}{5}$ となる。

(答) $m = \frac{3}{5}, n = \frac{4}{5}$

(2)

$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AF}$ とすると，

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AF}$$

$$= \frac{3}{5}p\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}p\overrightarrow{AC}$$

であり，点 P は線分 BC 上の点であることから，

$$\frac{3}{5}p + \frac{4}{5}p = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5}p = 1$$

を満たす。よって，$p = \frac{5}{7}$ となる。また，$\overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AF}$ とするとき

$$\overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AF}$$

$$= \frac{1}{5}q\overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}q\overrightarrow{AE}$$

であり，点 Q は線分 DE 上の点であることから，

$$\frac{1}{5}q + \frac{2}{5}q = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}q = 1$$

を満たす。よって，$q = \frac{5}{3}$ となる。

(答) $p = \frac{5}{7}, q = \frac{5}{3}$

(3)

△ABP と△ADQ の面積はそれぞれ

$$\triangle ABP = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right|\sin\angle BAP$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\frac{5}{7}\overrightarrow{AF}\right|\sin\angle BAP$$

$$= \frac{5}{7}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|\sin\angle BAP$$

$$\triangle ADQ = \left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{AQ}\right|\sin\angle DAQ$$

$$= \left|3\overrightarrow{AB}\right|\left|\frac{5}{3}\overrightarrow{AF}\right|\sin\angle DAQ$$

$$= 5\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|\sin\angle DAQ$$

である。$\angle BAP = \angle DAQ$ であることから

$$\triangle ADQ = 5\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|\sin\angle BAP$$

$$= 7\triangle ABP$$

となる。よって,△ADQ の面積は△ABP の面積の 7 倍である。

(答) 7 倍

4

(1)

$C_1 : y=2x^2$, $C_2 : y=-x^2+2x-a$ の交点の x 座標は，x についての方程式

$$2x^2=-x^2+2x-a$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-2x+a=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

の解に対応する。C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，方程式①が実数解をもたない。方程式①の解の判別式を D_1 とすると，求める条件は

$$D_1<0$$

$$\Leftrightarrow 4-12a<0$$

$$\Leftrightarrow a>\frac{1}{3}$$

となる。

(答) $a>\dfrac{1}{3}$

(2)

$f(x)=2x^2$ とおくと $f'(x)=4x$ であることから，点 $(t,\ f(t))$ における $C_1 : y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

$$\Leftrightarrow y=4tx-2t^2$$

である。これが $C_2 : y=-x^2+2x-a$ と接するとき，x についての方程式

$$4tx-2t^2=-x^2+2x-a$$

$$\Leftrightarrow x^2+2(2t-1)x+a-2t^2=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

が重解をもつ。方程式②の解の判別式を D_2 とすると，求める条件は

$$\frac{D_2}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^2-(a-2t^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2-4t+1-a+2t^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=6t^2-4t+1 \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

となる。

(答) $a=6t^2-4t+1$

(3)

C_1, C_2 の両方に接する 2 つの直線の C_1 上の接点の x 座標を t_1, t_2 とおくと，接線の傾きはそれぞれ $4t_1, 4t_2$ となる。この 2 直線が直交するとき

$$4t_1\times 4t_2=-1$$

$$\Leftrightarrow t_1t_2=-\frac{1}{16} \qquad \cdot\cdot\cdot ④$$

である。ここで(2)より t_1, t_2 は③を満たすことから，③を t についての方程式と見ると t_1, t_2 は方程式③の 2 実数解にあたる。③は

$$6t^2-4t+1-a=0$$

とかけるため，解と係数の関係より

$$t_1t_2=\frac{1-a}{6} \qquad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

となる。④，⑤より

$$-\frac{1}{16}=\frac{1-a}{6}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{11}{8}$$

である。これは $a>\dfrac{1}{3}$ を満たす。

(答) $a=\dfrac{11}{8}$