1

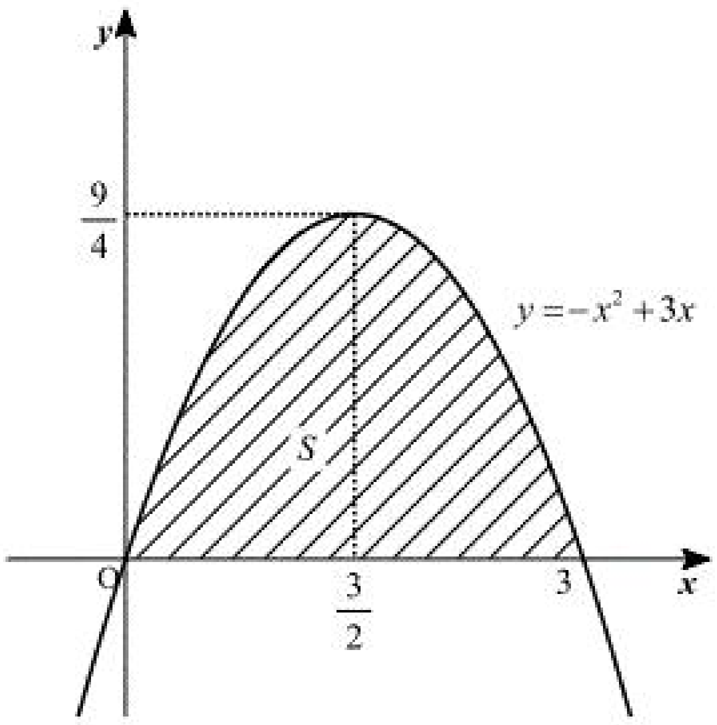
〔解答〕

(2)

〔解説〕

$$-x^2+3x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0,\ 3$$

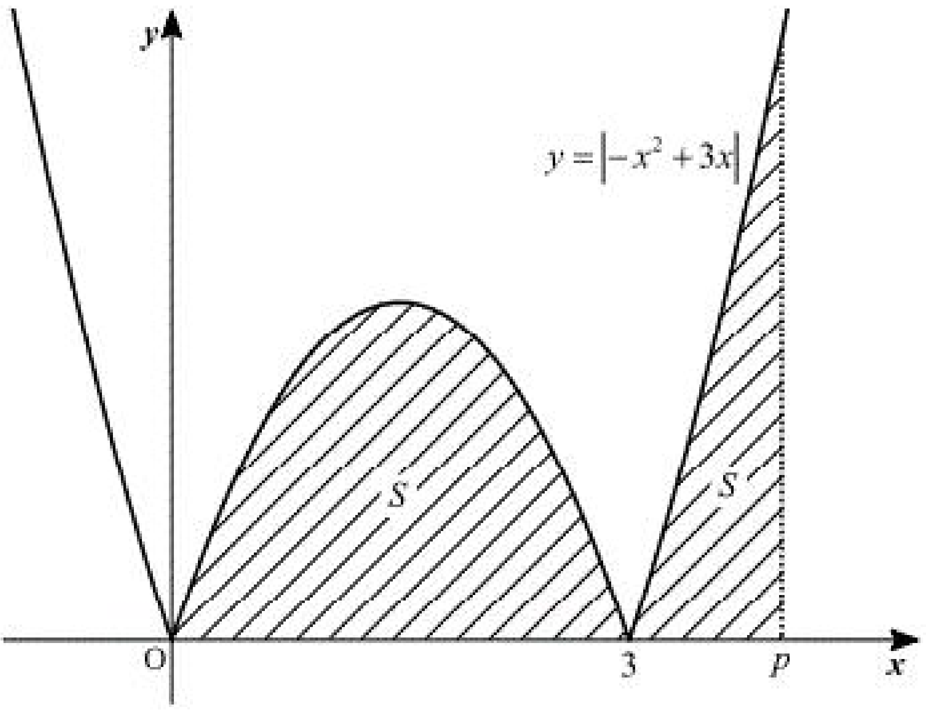
より，$y=-x^2+3x$ のグラフは次のようになる。



したがって，$y=-x^2+3x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^3\left(-x^2+3x\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{2}$$

と求まる。



また，

$$\int_0^p\left|-x^2+3x\right|dx=2S$$

となるとき，$y=\left|-x^2+3x\right|$ のグラフは上図の通りであるから，

$$\int_3^p\left|-x^2+3x\right|dx=S$$

となればよい。このとき，明らかに $p>3$ である。$x \geqq 3$ のとき，

$$-x^2+3x \leqq 0$$

であるから，

$$\int_3^p\left|-x^2+3x\right|dx=\int_3^p\left(x^2-3x\right)dx$$

となる。よって，

$$\int_3^p\left(x^2-3x\right)dx=\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_3^p=\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{p^3}{3}-\frac{3}{2}p^2+\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow p^2\left(\frac{1}{3}p-\frac{3}{2}\right)=0$$
$$\therefore p=\frac{9}{2}\ \ (\because p>3)$$

と求まる。

2

〔解答〕

(3)

〔解説〕

$$f(x)=x^2+3x\int_0^1 f(t)\,dt-2\int_0^1 tf(t)\,dt$$

である。ここで，a, b を定数として

$$\int_0^1 f(t)\,dt=a,\ \int_0^1 tf(t)\,dt=b$$

とおくと，

$$f(x)=x^2+3ax-2b$$

と表せる。よって，

$$\begin{aligned}a&=\int_0^1\left(t^2+3at-2b\right)dt\\&=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}at^2-2bt\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}a-2b\end{aligned}$$

より，

$$a=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}a-2b \qquad \cdots ①$$

であり，また

$$\begin{aligned}b&=\int_0^1\left(t^3+3at^2-2bt\right)dt\\&=\left[\frac{t^4}{4}+at^3-bt^2\right]_0^1\\&=\frac{1}{4}+a-b\end{aligned}$$

より，

$$b=\frac{1}{4}+a-b \qquad \cdots ②$$

である。①，②より，

$$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{5}{24}$$

と求まる。よって，

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{12}$$

となる。

3

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$P(x)$ を x^3-x で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^3-x)Q(x)+(x+1)^2\\&=x(x+1)(x-1)Q(x)+(x+1)^2\end{aligned}$$

と書ける。よって，

$$P(1)=4,\ P(0)=1,\ P(-1)=0 \qquad \cdots ①$$

となる。次に，$P(P(x))$ を x^2+x で割ったときの商を $R(x)$ とおくと，余りは高々1次式であるから，

$$P(P(x))=x(x+1)R(x)+ax+b$$

と書ける(a, b は実数)。ここで，①を利用すると，

$$P(P(0))=P(1)=4$$
$$P(P(-1))=P(0)=1$$

であるから，

$$\begin{cases}4=b\\1=-a+b\end{cases}$$
$$\therefore (a,\ b)=(3,\ 4)$$

と求まる。以上より，求める余りは，

$$3x+4$$

である。

4

〔解答〕

(4)

〔解説〕

$$\lim_{x\to1}(x-1)=0,\ \lim_{x\to2}(x-2)=0$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$ と $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$ が収束するためには，

$$\lim_{x\to1}f(x)=0,\ \lim_{x\to2}f(x)=0$$

が必要である。$f(x)$ は 3 次関数であることから，

$$f(x)=(ax+b)(x-1)(x-2)$$

と書ける($a\neq0$)。よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}(ax+b)(x-2)\\&=-a-b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}&=\lim_{x\to2}(ax+b)(x-1)\\&=2a+b\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$ のとき

$$-a-b=1 \qquad ・・・①$$

$$2a+b=2 \qquad ・・・②$$

が成り立つ。①，②を連立して，

$$(a,b)=(3,-4)$$

と求まる。よって，

$$f(x)=(3x-4)(x-1)(x-2)$$

となるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}&=\lim_{x\to3}(3x-4)\\&=5\end{aligned}$$

である。

$\boxed{5}$

〔解答〕

(2)

〔解説〕

$\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{2}$ より,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$0<\alpha+\beta<\pi$$

であるから,

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

と求まる。

$\boxed{6}$

〔解答〕

(3)

〔解説〕

条件より，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角が $60°$ であるとき，$|\vec{b}| = k|\vec{a}|$ を用いて

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60° = \frac{1}{2}k|\vec{a}|^2$$

$$|\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2$$

である。$3\vec{a}+\vec{b}$ と $7\vec{a}-4\vec{b}$ が垂直であることから，

$$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(7\vec{a}-4\vec{b}) = 0$$
$$\Leftrightarrow 21|\vec{a}|^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(21 - \frac{5}{2}k - 4k^2\right)|\vec{a}|^2 = 0$$

と表すことができる。$|\vec{a}| \neq 0$ を考慮して，

$$21 - \frac{5}{2}k - 4k^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8k^2 + 5k - 42 = 0$$
$$\Leftrightarrow (k-2)(8k+21) = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 2, -\frac{21}{8}$$

となる。$|\vec{b}| = k|\vec{a}| > 0$ より，$k > 0$ であるから，

$$k = 2$$

である。

$\boxed{7}$

〔解答〕

(1)

〔解説〕

条件より，

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-3)^2+y^2},\ \mathrm{PH}=|x|$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=2|x|$$

となる。上式の両辺はともに正であるから，P の軌跡を表す図形の方程式は

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2|x|$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=4x^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+6x-9-y^2=0$$
$$\Leftrightarrow 3(x+1)^2-y^2=12$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

と求まる。

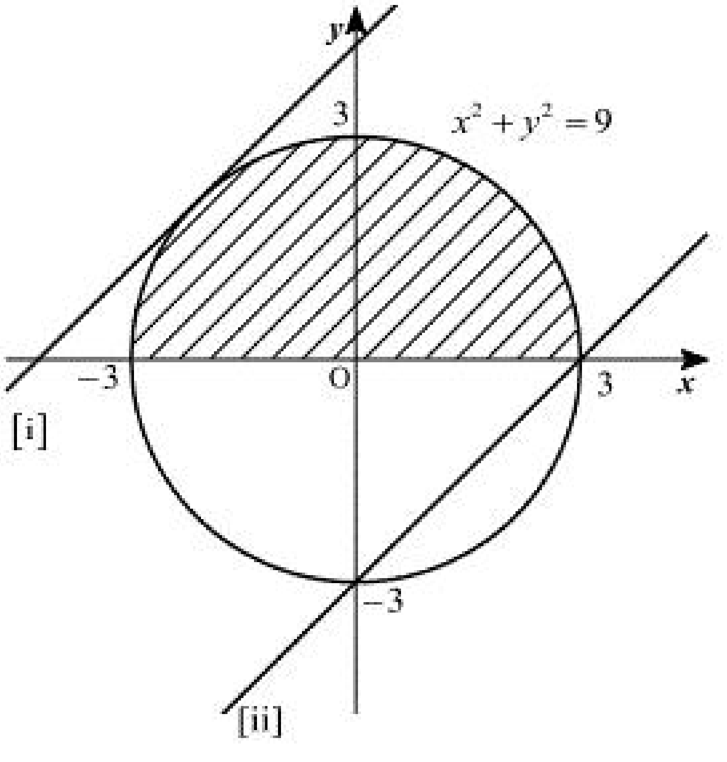
8

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$x^2+y^2 \leqq 9$ かつ $y \geqq 0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲は下図の斜線部のようになる。ただし，境界線は含む。



$$y-x=k$$
$$\Leftrightarrow y=x+k$$

とおくとき，$x^2+y^2 \leqq 9$ かつ $y \geqq 0$ を満たす点 $(x,\ y)$ に対する $y-x$ のとり得る値の範囲は，直線 $y=x+k$ が上図の領域と共通点を持つような k の範囲にあたる。k は直線 $y=x+k$ の y 切片であり，また，k が異なる値をとるとき直線 $y=x+k$ は互いに平行である。k の値が最大となるのは上図[i]のように円と接する時であり，このとき原点と直線 $y=x+k$ の距離が円 $x^2+y^2=9$ の半径3と一致することより，$k>0$ であるもとで

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=3$$
$$\therefore k=3\sqrt{2}$$

となる。また，k が最小となるのは，[ii]のように直線 $y=x+k$ が点 $(3,\ 0)$ を通るときであるから，

$$k=-3$$

の時である。したがって，$-3 \leqq k \leqq 3\sqrt{2}$ となり，求める $y-x$ の範囲は，

$$-3 \leqq y-x \leqq 3\sqrt{2}$$

となる。

$\boxed{9}$

〔解答〕

(3)

〔解説〕

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 48 &= \log_{10}\left(2^4 \times 3\right) \\
&= 4\log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\
&= 4 \times 0.3010 + 0.4771 \\
&= 1.6811 \\
\log_{10} 50 &= \log_{10}(100 \div 2) \\
&= 2 - \log_{10} 2 \\
&= 2 - 0.3010 \\
&= 1.6990
\end{aligned}
$$

と計算できる。ここで，$48 < 49 < 50$ より，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{48} < 7 < \sqrt{50} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{10} 48 < \log_{10} 7 < \frac{1}{2}\log_{10} 50 \\
&\Leftrightarrow 0.84055 < \log_{10} 7 < 0.8495
\end{aligned}
$$

であるから，$\log_{10} 7$ の小数第 3 位以下を切り捨てると，

$$\log_{10} 7 = 0.84$$

となる。

10

〔解答〕

(3)

〔解説〕

$x>0$ のとき，$\dfrac{1}{x^x}>0$ であることから，$y>0$ のもとで考える。このとき，

$$y=\frac{1}{x^x}$$
$$\Leftrightarrow \log y=-x\log x$$

となる。両辺を x で微分すると，

$$\frac{y'}{y}=-\log x-1$$
$$\Leftrightarrow y'=-\frac{\log x+1}{x^x}$$

と求まる。$y'=0$ のとき，

$$\log x+1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

である。$x^x>0$ より，$x>0$ における $y=\dfrac{1}{x^x}$ の増減表は下記のとおりである。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$

以上より，$y=\dfrac{1}{x^x}$ は $x=\dfrac{1}{e}$ のとき，最大となる。

$\boxed{11}$

〔解答〕

(3)

〔解説〕

$$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

より，

$$\lim_{t \to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{2t \to 0}\left\{(1+2t)^{\frac{1}{2t}}\right\}^{2}$$

$$= e^{2}$$

である。

12

〔解答〕

(4)

〔解説〕

与えられた関数はすべて $x \neq 0$ で連続かつ微分可能である。また，与えられた関数はすべて

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = f(0)$$

を満たすので，これらはすべて $x = 0$ で連続である。したがって，与えられた関数が $x = 0$ で微分可能であるためには，

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

であることを示せばよい。

(1)について

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{h} = \lim_{h \to +0} h^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \to -0} (-h) = 0$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

(2)について

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{-h^3}{h} = \lim_{h \to +0} (-h^2) = 0$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to -0} 0 = 0$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

(3)について

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to -0} 1 = 1$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

(4)について

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h^{\frac{3}{4}}}{h} = \lim_{h \to +0} h^{-\frac{1}{4}} = +\infty$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to -0} 1 = 1$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でない。

(5)について

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\sin^3 h}{h} = \lim_{h \to +0} h^2 \cdot \left(\frac{\sin h}{h}\right)^3 = 0$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-\sin^2 h}{h} = \lim_{h \to -0} (-h) \cdot \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 = 0$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

以上より，$x = 0$ で微分可能でない関数 $f(x)$ は(4)である。

$\boxed{13}$

〔解答〕

(3)

〔解説〕

求める値を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= 100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1^2 \\
&= \left(100^2+98^2+\cdots+2^2\right)-\left(99^2+97^2+\cdots+1^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{50}(2k)^2-\sum_{k=1}^{50}(2k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{50}4k^2-\sum_{k=1}^{50}\left(4k^2-4k+1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{50}(4k-1) \\
&= 4\times\frac{1}{2}\times 50\times 51-50 \\
&= 5050
\end{aligned}
$$

となる。

14

〔解答〕

(4)

〔解説〕

$3^x = t\ (t>0)$ とおくと，与式は，

$$9^x - 10\cdot 3^x + 9 > 0$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 > 0$$

と表せる。これを解くと，

$$t^2 - 10t + 9 > 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(t-9) > 0$$
$$\therefore 0 < t < 1,\ 9 < t$$

と求まる。したがって，

$$0 < 3^x < 1,\ 9 < 3^x$$
$$\therefore x < 0,\ 2 < x$$

となる。

15

〔解答〕

(2)

〔解説〕

(ⅰ)

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=a \\ a+2b=b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a+b=0$$

と変形できる。したがって,

$a=1,\ b=-1$

とすれば(ⅰ)は正しい。

(ⅱ)

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=2a \\ a+2b=2b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a=b=0$$

と変形できる。したがって,(ⅱ)は正しくない。

(ⅲ)

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=3a \\ a+2b=3b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a-b=0$$

と変形できる。したがって,

$a=1,\ b=1$

とすれば,(ⅲ)は正しい。

以上より,(ⅰ),(ⅲ)は正しいが,(ⅱ)は正しくない。