1

(1)

$f(\theta)=4(1-\cos^2\theta+\cos\theta)$ について，$\cos\theta=x$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\theta)&=4(1-\cos^2\theta+\cos\theta)\\ &=4(-x^2+x+1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(\theta)=4(-x^2+x+1)$

(2)

(1)より，

$$f(\theta)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5$$

となる。$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき，$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ であるから，このとき $f(\theta)$ は

$x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $M_1=5$

$x=1$ のとき最小値 $m_1=4$

をとる。

(答) $M_1=5,\ m_1=4$

(3)

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$-1\leqq x\leqq 0$ であるから，このとき $f(\theta)$ は

$x=0$ のとき最大値 $M_2=4$

$x=-1$ のとき最小値 $m_2=-4$

をとる。

(答) $M_2=4,\ m_2=-4$

$\boxed{2}$

(1)

$$||x-9|-1| \leqq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leqq |x-9|-1 \leqq 2$$
$$\Leftrightarrow -1 \leqq |x-9| \leqq 3$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqq |x-9| \leqq 3$$
$$\Leftrightarrow -3 \leqq x-9 \leqq 3$$
$$\Leftrightarrow 6 \leqq x \leqq 12$$

となる。

(答) $6 \leqq x \leqq 12$

(2)

②式より,

$$|x-4| \leqq k$$
$$\Leftrightarrow -k \leqq x-4 \leqq k \ (\because k > 0)$$
$$\Leftrightarrow 4-k \leqq x \leqq 4+k$$

となるから, ①, ②をともに満たす実数 x が存在するのは

$$6 \leqq 4+k \quad かつ \quad 4-k \leqq 12$$
$$\Leftrightarrow 2 \leqq k \quad かつ \quad -8 \leqq k$$
$$\Leftrightarrow k \geqq 2$$

のときである。

(答) $k \geqq 2$

(3)

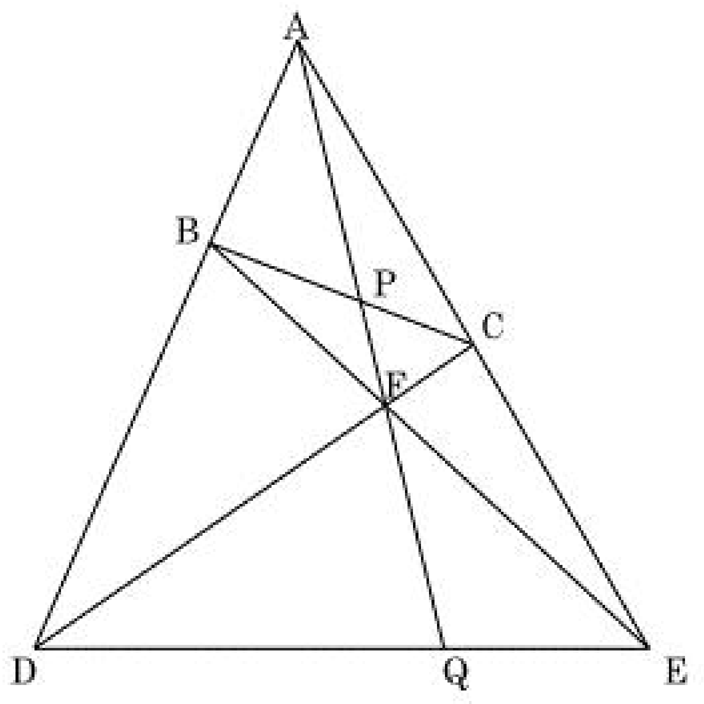
①の解が②に含まれるのは

$$4-k \leqq 6 \quad かつ \quad 12 \leqq 4+k$$
$$\Leftrightarrow -2 \leqq k \quad かつ \quad 8 \leqq k$$
$$\Leftrightarrow k \geqq 8$$

のときである。

(答) $k \geqq 8$

3



(1)

Fは線分BE上に存在するから，実数sを用いて

$$\overrightarrow{AF}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AE}$$
$$=s\overrightarrow{AB}+2(1-s)\overrightarrow{AC} \quad \cdots ①$$

と表せる。また，Fは線分CD上に存在するから，実数tを用いて，

$$\overrightarrow{AF}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AC}$$
$$=3t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC} \quad \cdots ②$$

と表せる。$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$は一次独立であるから，①，②より，

$$\begin{cases} s=3t \\ 2(1-s)=1-t \end{cases}$$
$$\therefore s=\frac{3}{5},\ t=\frac{1}{5}$$

となる。よって①より，

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \quad \cdots ③$$

となるから，

$$m=\frac{3}{5},\ n=\frac{4}{5}$$

である。

(答)$m=\frac{3}{5},\ n=\frac{4}{5}$

(2)

③より，

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AF}$$
$$=\frac{3}{5}p\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}p\overrightarrow{AC}$$

であり，Pは線分BC上にあるので，

$$\frac{3}{5}p+\frac{4}{5}p=1$$
$$\therefore p=\frac{5}{7}$$

となる。また，③より，

$$\overrightarrow{AQ}=q\overrightarrow{AF}$$
$$=\frac{3}{5}q\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}q\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{5}q\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}q\overrightarrow{AE}$$

であり，Qは線分DE上にあるので，

$$\frac{1}{5}q+\frac{2}{5}q=1$$
$$\therefore q=\frac{5}{3}$$

となる。

(答)$p=\frac{5}{7},\ q=\frac{5}{3}$

(3)

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=1:3$$

であり，また(2)より，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}=\frac{5}{7}:\frac{5}{3}$$
$$=3:7$$

であるから，△ADQの面積は△ABPの面積の

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{7}{3}=7$$

倍である。

(答)7倍

4

(1)

求める条件は,

$$2x^2=-x^2+2x-a$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-2x+a=0 \qquad \cdots ①$$

を x についての方程式とみたとき，方程式①が実数解を持たないことである。①の判別式を D_1 とおくと,

$$\frac{D_1}{4}=1-3a$$

であるから，求める a の範囲は,

$$D_1<0$$
$$\Leftrightarrow 1-3a<0$$
$$\Leftrightarrow a>\frac{1}{3}$$

である。

(答) $a>\frac{1}{3}$

(2)

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2\right)=4x \qquad \cdots ②$$

であることより，点 $\left(t,\ 2t^2\right)$ における C_1 の接線の方程式は,

$$y-2t^2=4t\left(x-t\right)$$
$$\Leftrightarrow y=4tx-2t^2$$

となる。この直線が C_2 と接するのは,

$$-x^2+2x-a=4tx-2t^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\left(2t-1\right)x+a-2t^2=0 \qquad \cdots ③$$

を x についての方程式とみたとき，方程式③が重解をもつときである。③の判別式を D_2 とおくと,

$$\frac{D_2}{4}=\left(2t-1\right)^2-\left(a-2t^2\right)$$
$$=6t^2-4t+1-a$$

より，求める a の条件は,

$$D_2=0$$
$$\Leftrightarrow 6t^2-4t+1-a=0 \qquad \cdots ④$$
$$\Leftrightarrow a=6t^2-4t+1$$

となる。

(答) $a=6t^2-4t+1$

(3)

C_1 上の点 $\left(t_1,\ 2t_1{}^2\right), \left(t_2,\ 2t_2{}^2\right)$ における接線が C_2 にも接しているとすると，②よりそれぞれの接線の傾きは $4t_1,\ 4t_2$ である。よってこの 2 つの接線が垂直であるとき,

$$4t_1\cdot 4t_2=-1$$
$$\therefore t_1t_2=-\frac{1}{16} \qquad \cdots ⑤$$

が成り立つ。このとき，④を t についての 2 次方程式とみると，$t_1,\ t_2$ は方程式④の 2 解であるから，解と係数の関係より,

$$t_1t_2=\frac{1-a}{6} \qquad \cdots ⑥$$

となる。よって⑤，⑥より,

$$-\frac{1}{16}=\frac{1-a}{6}$$
$$\therefore a=\frac{11}{8}$$

である。

(答) $a=\frac{11}{8}$

$\boxed{5}$

(1)

$\cos\theta \neq 0$ のもとで

$$\begin{aligned}\tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= -1\end{aligned}$$

となる。

(答) -1

(2)

$$\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx$$

について

$$t = \frac{1}{2}x$$

とおくと,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$$

x	0	$\to$	2
t	0	$\to$	1

となるから,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{8}{4+(2t)^2}\cdot 2\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,dt\end{aligned}$$

である。ここで,

$$t = \tan\theta$$

とおくと,

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

t	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

となるから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \left[4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi\end{aligned}$$

となる。

(答) (ⅰ) 4, (ⅱ) π

(3)

区分求積法より,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} 8\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right) \\ &= 8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= 8\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= 2\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \\ &= 2\pi\ (\because (2))\end{aligned}$$

を得る。

(答) 2π