

〔解答〕

(4)

〔解説〕

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \text{ より}$$

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x < -1, 3 < x) \\ -(x^2 - 2x - 3) & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 |x^2 - 2x - 3| dx &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx + \int_{-1}^3 \{-(x^2 - 2x - 3)\} dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_3^4 \\ &= \frac{46}{3} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$$\begin{aligned}\log x - \sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= \sin x\end{aligned}$$

に関して真数条件より

$$x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。上の方程式の解の個数は関数 $y = \log x$ と関数 $y = \sin x$ のグラフの共有点の個数に等しい。 $f(x) = \log x$, $g(x) = \sin x$ とおくと、 $x > 0$ において

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x} > 0 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} < 0\end{aligned}$$

であることから、

$$f(x) \text{ は上に凸な単調増加関数} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $y = f(x)$ 上の点 $(1, 0)$ における接線の方程式は $y = x - 1$ であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$f(x) \leq x - 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。また

$$\begin{aligned}f(e) &= 1 \\ g(x) &\leq 1\end{aligned}$$

であることと、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より、関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ のグラフの共有点が存在しうるような x の値の範囲は $0 < x \leq e (< \pi)$ である。

[1] $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$h(x) = g(x) - (x - 1) \text{ とおくと、 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned}h'(x) &= \cos x - 1 < 0 \\ h(0) &= 1 > 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 - \frac{\pi}{2} > 0\end{aligned}$$

であり、常に

$$\begin{aligned}h(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow g(x) &> x - 1 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より $f(x) < g(x)$ となるから、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ のグラフの共有点は存在しない。

[2] $\frac{\pi}{2} \leq x \leq e$ のとき

$\textcircled{1}$ を用いて

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} - 1 < 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。また、 $\frac{\pi}{2} < e < \pi$ であることより、この x の値の範囲において

$$\text{関数 } g(x) \text{ は単調減少関数} \quad \dots \textcircled{6}$$

であり

$$\begin{aligned}g\left(\frac{\pi}{2}\right) &> g(e) > g(\pi) \\ \Leftrightarrow 1 &> g(e) > 0 \quad \dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{5}$, $\textcircled{7}$ と $f(e) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right), f(e) > g(e)$$

となり、 $\textcircled{2}$, $\textcircled{6}$ を考慮すると、関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ のグラフの共有点はただ 1 つ存在する。

以上、[1], [2] より、関数 $y = \log x$ と関数 $y = \sin x$ のグラフの共有点はただ 1 つ存在し、これより、方程式 $\log x - \sin x = 0$ の解の個数は 1 個である。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(2-x) dx &= \int_0^1 \left\{ -(2-x)' \log(2-x) \right\} dx \\ &= \left[-(2-x) \log(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left\{ -(2-x) \cdot \frac{-1}{2-x} \right\} dx \\ &= 2 \log 2 - [x]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - 1\end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(4)

〔解説〕

点 (a, b) に f, g の順に1次変換を用いると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b \\ 2a+3b \end{pmatrix}$$

となり、これが点 $(-1, 0)$ に一致することから

$$\begin{cases} 3a+5b = -1 \\ 2a+3b = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a = 3, b = -2$$

となる。

[解答]

(2)

[解説]

$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$2 = 10^{0.3010}, 3 = 10^{0.4771}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} 2^{38} &= (10^{0.3010})^{38} \\ &= 10^{11.438} \end{aligned}$$

となることから

$$\begin{aligned} 10^{0.3010} \times 10^{11} &< 10^{11.438} < 10^{0.4771} \times 10^{11} \\ \Leftrightarrow 2 \times 10^{11} &< 2^{38} < 3 \times 10^{11} \end{aligned}$$

が成り立ち、 2^{38} の最高位の数字は2である。

〔解答〕

(4)

〔解説〕

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x - x^2 + x}{\tan(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{\tan(x-1)} \cdot \frac{(x-1)e^x - (x-1)x}{x-1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{\tan(x-1)} \cdot (e^x - x) \right\} \\ &= 1 \cdot (e-1) \\ &= e-1\end{aligned}$$

となる。

[解答]

(2)

[解説]

$x \geq 1$ において関数 $f(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x)' \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

であり、 $x < 1$ において関数 $f(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{ax+b}{x+1} \right)' \\ &= \frac{a(x+1) - (ax+b)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a-b}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

である。関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能となる条件は

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) \end{cases}$$

であるから

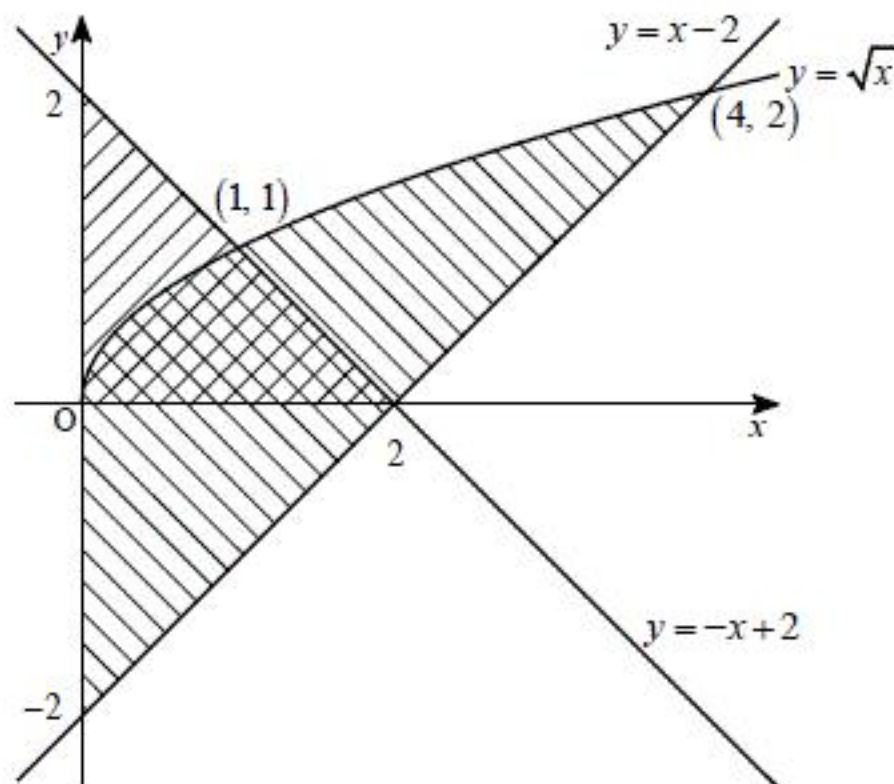
$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 = \frac{a+b}{2} \\ 1 = \frac{a-b}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(3)

[解説]



求める体積は上図の右下がりの斜線部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積である。これは $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返した図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積と一致する。よって、求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 (-x+2)^2 dx + \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2 &= \pi \left(\left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^4 - \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{43}{6} \pi \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(3)

[解説]

題意より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{4}y_n \\ -\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。 $x_1 = 4, y_1 = 0$ より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{4}y_n \\ y_{n+1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_{n+1} + y_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \\ x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_{n+1} + y_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(x_n + y_n + 2) \\ x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_n + y_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_1 + y_1 + 2) \\ x_n - y_n = x_1 - y_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_n + y_n + 2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ x_n - y_n = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \\ y_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

[解答]

(4)

[解説]

1から100の整数の中に含まれる 3^k (k は自然数)の倍数の個数を数える。

[1] 3の倍数について

$3 \times 0 < 1 < 3 \times 1, 3 \times 33 < 100 < 3 \times 34$ より, 1から100の整数の中に3の倍数は
 $33 - 1 + 1 = 33$ 個

含まれる。

[2] 3^2 の倍数について

$3^2 \times 0 < 1 < 3^2 \times 1, 3^2 \times 11 < 100 < 3^2 \times 12$ より, 1から100の整数の中に 3^2 の倍数は
 $11 - 1 + 1 = 11$ 個

含まれる。

[3] 3^3 の倍数について

$3^3 \times 0 < 1 < 3^3 \times 1, 3^3 \times 3 < 100 < 3^3 \times 4$ より, 1から100の整数の中に 3^3 の倍数は
 $3 - 1 + 1 = 3$ 個

含まれる。

[4] 3^4 の倍数について

$3^4 \times 0 < 1 < 3^4 \times 1, 3^4 \times 1 < 100 < 3^4 \times 2$ より, 1から100の整数の中に 3^4 の倍数は
 $1 - 1 + 1 = 1$ 個

含まれる。

以上, [1], [2], [3], [4]より, $\frac{100!}{3^n}$ が整数となるような最大の自然数 n の値は

$$33 + 11 + 3 + 1 = 48$$

である。

[解答]

(2)

[解説]

$(x^2+x+1)^8$ の展開式における $(x^2)^a \cdot x^b \cdot 1^c = x^{2a+b}$ ($a+b+c=8, a, b, c \geq 0$) の係数は $\frac{8!}{a!b!c!}$ で

ある。ここで $2a+b=6$ となるような (a, b, c) の組は

$$(a, b, c) = (0, 6, 2), (1, 4, 3), (2, 2, 4), (3, 0, 5)$$

であるから、 $(x^2+x+1)^8$ の展開式において x^6 の係数は

$$\frac{8!}{0!6!2!} + \frac{8!}{1!4!3!} + \frac{8!}{2!2!4!} + \frac{8!}{3!0!5!} = 784$$

となる。

[解答]

(4)

[解説]

異なる 7 枚のカードから同時に 2 枚引き出す場合の数は ${}_7C_2$ 通りある。一方、 $\frac{Y}{X}$ が整数にな

るような (X, Y) の値の組は

$$(X, Y) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 6), (3, 6)$$

の 9 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{9}{{}_7C_2} = \frac{3}{7}$$

である。

[解答]

(1)

[解説]

 $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 4, 2)$ より

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$$

となるから

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(2)

[解説]

極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ について

$$r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2r(\cos \theta + \sin \theta) \quad \dots \textcircled{1}$$

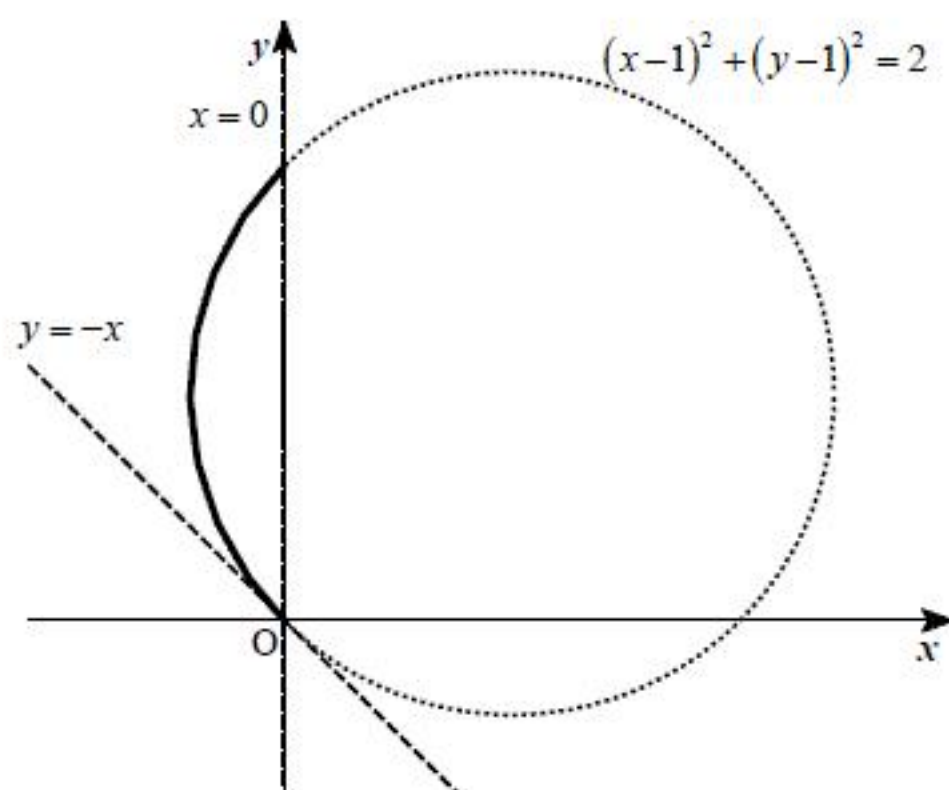
であり、 xy 直交座標と極座標の関係は

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

であることより、 $\textcircled{1}$ は xy 直交座標系において

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

となるから、この方程式は中心 $(1, 1)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円を表す。 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ のとき、長さを求める曲線は、この図形のうち $x \leq 0$ かつ $y \geq -x$ である部分となり、下図の実線部分となる。よって、求める曲線の長さは、半径 $\sqrt{2}$ 、中心角 $\frac{\pi}{2}$ の円弧の長さであるから

$$2\sqrt{2}\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

となる。