

(注意) 解答用紙に途中の計算を明記せよ。解答枠の用意されている設問については枠内に解答を記入せよ。

1 2つの曲線 $C_1: y = -x^2 + 9$, $C_2: y = -x^2 + ax + b$ があり, C_2 は 2 点 $A(3, -3)$, $B(5, -7)$ を通るものとする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 定数 a, b の値を求めよ。また 2つの曲線 C_1, C_2 の交点 P の x 座標 x_0 を求めよ。
- (2) 2つの曲線 C_1, C_2 の両方に接する直線を l とするとき, C_1 と l との接点 Q の x 座標 x_1 を求めよ。
- (3) 2つの曲線 C_1, C_2 と直線 l によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

2 関数 $y = \sin x + \cos x - \sin x \cos x$ について, 次の問に答えよ。

- (1) $\sin x + \cos x = t$ とおいて, y を t で表せ。
- (2) $0 \leq x < 2\pi$ のとき, t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) y の最大値 M , 最小値 m を求めよ。

3 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがある。最初にこの中から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し, 順に百の位, 十の位, 一の位の数として 3 桁の整数をつくる。次に残りの 6 枚の中から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し, 順に百の位, 十の位, 一の位の数として 3 桁の整数をつくる。最後に残りの 3 枚の中からやはり 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し, 順に百の位, 十の位, 一の位の数として 3 桁の整数をつくる。このようにしてつくった整数をそれぞれ a, b, c とする。このとき, 次の問に答えよ。ただし, (2), (3), (4) の解答にはそれ以上約分できない形の分数を用いること。

- (1) a, b, c の百の位の数字の和を x , 十の位の数字の和を y としたとき, $a + b + c$ を x と y を用いてできるだけ簡単な式で表せ。また, $x = 8$ のとき, $a + b + c$ の最小値を求めよ。
- (2) $a + b + c$ の一の位が 0 になる確率を求めよ。
- (3) $a + b + c$ が偶数になる確率を求めよ。
- (4) $a + b + c$ が 860 未満になる確率を求めよ。

4 方程式 $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 19 = 0$ が表す曲線上の点 (x, y) のうち, x と y がともに整数であるような点全体の集合を A とする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 集合 A の要素の個数を求めよ。
- (2) 点 P を集合 A の要素とする。このとき, 原点 O と点 P との距離 OP のとり得る値の最大値 M と最小値 m を求めよ。
- (3) 点 P を集合 A の要素とする。このとき, 原点 O と点 P と点 $Q(4, -2)$ を頂点とする三角形 OPQ の面積のとり得る値の最大値 S と最小値 s を求めよ。

5 a を正の実数として、曲線 C と直線 l を

$$C : y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$l : y = 1 - \frac{x}{a}$$

とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) l が C 上のある点における接線となるときの a の値 a_0 を求めよ。
- (2) $a > a_0$ のとき、 C と l は点 $(0, 1)$ を含めた 3 点で交わる。点 $(0, 1)$ 以外の 2 つの交点の x 座標を s, t とするとき、 $s+t$ を a で表せ。
- (3) (2) において $s < t$ とする。 $P = \int_0^s \frac{dx}{1+x^2}$, $Q = \int_s^t \frac{dx}{1+x^2}$ として、 $\tan P, \tan Q$ を a で表せ。
- (4) $P = Q$ となる a の値を求めよ。