

(1)

与えられた関係式を変形する。

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

$$(x+y)^2 - xy = 3$$

 $x+y=s$, $xy=t$ を代入して,

$$s^2 - t = 3$$

$$\Leftrightarrow t = s^2 - 3$$

答 $t = s^2 - 3$

(2)

実数 x, y を解とする p についての二次方程式は

$$p^2 - (x+y)p + xy = 0$$

となる。ここで, $x+y=s$, $xy=t$ より

$$p^2 - sp + t = 0$$

判別式より, これが実数解 x, y をもつ条件は

$$D = s^2 - 4t \geq 0$$

(1) より $t = s^2 - 3$ を代入して整理すると

$$4 \geq s^2$$

答 $-2 \leq s \leq 2$

(3)

$$x^2 + y^2 + x + y = k$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + x + y = k$$

$$s^2 + s - 2t = k \quad (\because x+y=s, xy=t)$$

(1) より $t = s^2 - 3$ を代入して整理すると

$$k = -s^2 + s + 6$$

答 $k = -s^2 + s + 6$

(4)

$$k = -s^2 + s + 6$$

$$\frac{dk}{ds} = -2s + 1$$

より, $-2 \leq s \leq 2$ での k の増減表は次のようになる。

s	-2	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$\frac{dk}{ds}$	+	+	0	-	-
k	0	$\nearrow$	$\frac{25}{4}$	$\searrow$	4

ゆえに, k は $s = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{25}{4}$ を, $s = -2$ で最小値 0 をとる。答 $\begin{cases} M = \frac{25}{4} \\ m = 0 \end{cases}$

(1)

三角関数の合成をする。

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin x + 4\cos x \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) \end{aligned}$$

 $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$ となる α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いると、上式は、

$$\begin{aligned} f(x) &= 5(\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x) \\ &= 5\sin(x+\alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。

$$\text{答} \quad \begin{cases} r = 5 \\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

(2)

 $0 \leq x \leq \pi$ であることから、 $\sin(x+\alpha)$ の取りうる値の範囲は、図 1 より

$$-\frac{4}{5} \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$$

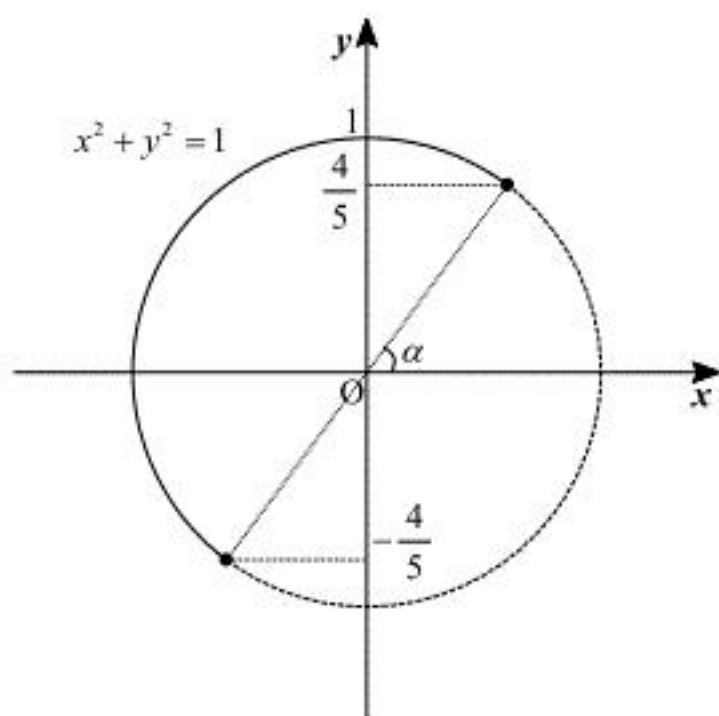


図 1

である。よって、

$$\begin{aligned} -4 &\leq 5\sin(x+\alpha) \leq 5 \\ \therefore -4 &\leq f(x) \leq 5 \end{aligned}$$

$$\text{最大値 } M = 5 \left(x = \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{最小値 } m = -4 \quad (x = \pi)$$

よって、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値 5 を、 $x = \pi$ のとき最小値 -4 をとる。

$$\text{答} \quad \begin{cases} M = 5 \\ m = -4 \end{cases}$$

(3)

(1)より、

$$f(x) \geq \frac{r}{2} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

また、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \pi$ より、

$$0 < x + \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

である必要がある。この条件下で①を解くと、

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \alpha \leq \frac{5\pi}{6}$$

となる。ここで、

$$\sin \frac{\pi}{6} < \sin \alpha = \frac{4}{5} < \sin \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

より、 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であることに気をつければ、②の範囲の内で実際に $0 \leq x \leq \pi$ を満たす x

の範囲は、

$$0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi - \alpha$$

となる。

$$\text{答} \quad 0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi - \alpha$$

(1)

 $f(x)$ を x について微分する。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3a$$

$f(x)$ が極値を持つ条件は、 $f'(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解を持つこと、すなわち $f'(x) = 0$ の判別式を D と置いたときに $D > 0$ となることであり、これは a を用いて

$$\frac{D}{4} = 9 - 9a > 0 \Leftrightarrow a < 1$$

と書くことができる。

答 $a < 1$

(2)

$f'(x) = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a$$

である。また、

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 - 4a$$

$\alpha - \beta < 0, a < 1$ を考慮すると

$$\alpha - \beta = -\sqrt{4 - 4a}$$

極大値は $f(\alpha)$ 、極小値は $f(\beta)$ なので、これらの差を計算すると、

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha^3 - \beta^3) - 3(\alpha^2 - \beta^2) + 3a(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta) \{ (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 3a \} \\ &= -\sqrt{4 - 4a} (2a - 2) \\ &= 4(1 - a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

これが 32 に等しくなればよいので、

$$(1 - a)^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow 1 - a = 4 \Leftrightarrow a = -3$$

答 $a = -3$

(3)

$a = -3$ のとき

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + b$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$$

よって、 $-4 \leq x \leq 4$ における $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	-4	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$b - 76$	$\nearrow$	$b + 5$	$\searrow$	$b - 27$	$\nearrow$	$b - 20$

よって、最大値は $b + 5$ であり、問の条件よりこれが 5 となるので、

$$b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$$

また、このときの最小値は $x = -4$ のときであり、 $m = b - 76 = -76$

答 $b = 0$

答 $m = -76$

(1)

$$S_n = 1 - (2n^2 + n - 1)a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{n-1} = 1 - \{2(n-1)^2 + (n-1) - 1\}a_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①-②, $S_n - S_{n-1} = a_n$ より,

$$a_n = -(2n^2 + n - 1)a_n + (2n - 3)na_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

整理して,

$$a_n = \frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

答 $a_n = \frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

(2)

まず, a_1 を求める。①に $n=1$ を代入すると

$$S_1 = 1 - (2 \cdot 1^2 + 1 - 1)a_1 = 1 - 2a_1$$

$S_1 = a_1$ より,

$$a_1 = 1 - 2a_1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

次に, (1)で求めた漸化式を次々に用いると, $n \geq 3$ で,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1} \\ &= \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1}a_{n-2} \\ &= \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} \cdot \frac{2n-7}{2n-3}a_{n-3} \\ &= \cdots = \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} \cdot \frac{2n-7}{2n-3} \cdots \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5}a_1 \\ &= \frac{3 \cdot 1}{(2n+1)(2n-1)}a_1 \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \quad \left(\because a_1 = \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

これは, $n=1, 2$ の時も成り立つ。

答 $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{20} (2n+1)(2n-1) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{20} n^2 - \sum_{n=1}^{20} 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 - 20 \\ &= 11460 \end{aligned}$$

答 $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = 11460$