

〔解答〕 (4)

〔解説〕

$x^2 + 2y^2 = 1$ を媒介変数 θ を用いて表すと,

$$(x, y) = \left(\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

となる。これを $2x + 3y$ に代入すると,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \cos \theta + 3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ &= \sqrt{\frac{17}{2}} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる (α は, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{17}}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ を満たす角)。したがって,

$$-\sqrt{\frac{17}{2}} \leq 2x + 3y \leq \sqrt{\frac{17}{2}}$$

より, 求める最大値は $\sqrt{\frac{17}{2}}$ である。

〔解答〕 (2)

〔解説〕

分母を有理化すると、

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

となる。ここで、 $4 < 7 < 9$ より $2 < \sqrt{7} < 3$ なので

$$1 < \frac{2+2}{3} < \frac{\sqrt{7}+2}{3} < \frac{3+2}{3} < 2$$

となる。したがって、

$$a=1, b=\frac{\sqrt{7}+2}{3}-1=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

となる。これを $a^2+2ab+3b^2$ に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} a^2+2ab+3b^2 &= 1 + \frac{2\sqrt{7}-2}{3} + \frac{8-2\sqrt{7}}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

を得る。

〔解答〕 (1)

〔解説〕

まず、分母 $\neq 0$ より、

$$1+x \neq 0, 1+\frac{1}{1+x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1, -2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。両辺に、 $\left(1+\frac{1}{1+x}\right)(1+x)$ をかけて整理すると、

$$x^2 = 3$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}$$

これは $\textcircled{1}$ を満たすので、解となる。

〔解答〕 (4)

〔解説〕

$(x+2y)^2 \geq 0$ より、与式を変形すると

$$x^2 - 2x = -(x+2y)^2 \leq 0$$

となる。 $x^2 - 2x \leq 0$ を満たす整数 x は $x = 0, 1, 2$ の 3 通りである。これらを与式に代入して、成り立つような整数 y を求める。

[1] $x = 0$ のとき

$$4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

[2] $x = 1$ のとき

$$(1+2y)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0, -1$$

[3] $x = 2$ のとき

$$(2+2y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

以上より、与式を満たす x, y の組は、 $(x, y) = (0, 0)(1, 0)(1, -1)(2, -1)$ の 4 組である。

〔解答〕 (4)

〔解説〕

A^2 を計算すると、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

となる。よって、

$$A^4 = E$$

である。これらを用いると、

$$A^{2010} = (A^4)^{502} \cdot A^2 = E^{502} \cdot -E = -E$$

となる。

〔解答〕 (2)

〔解説〕

与式において、底の条件と真数条件より、

$$2x > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2x \neq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x^3 + 6x^2 - x - 2 > 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。与式の右辺を変形すると、

$$\log_{2x}(x^3 + 6x^2 - x - 2) = \log_{2x}(2x)^2$$

となる。真数部分を比較すると、

$$x^3 + 6x^2 - x - 2 = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, -1, -2$$

を得る。このうち①、②、③を満たす x は、 $x=1$ のみなので、解は 1 個である。

〔解答〕 (3)

〔解説〕

与式を変形すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \right\}^{-2}$$

となる。ここで、 $-\frac{n}{2} = h$ とおくと、 $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow h \rightarrow -\infty$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow -\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

を得る。

〔解答〕 (3)

〔解説〕

x, y を極座標形式で表すと,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これを $x + y = 1$ に代入して整理すると,

$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を得る。

〔解答〕 (3)

〔解説〕

(1) 偽

反例： $a = 2, b = 2, c = 1$

(2) 偽

反例： $a = 1, b = 1, c = 1$

(3) 真

証明：命題の対偶は「 a, c とともに偶数ならば、 $ab + c$ は偶数である。」となるが、これは明らかに真である。よって、命題は真である。

(4) 偽

反例： $a = 1, b = 1, c = 1$

〔解答〕 (1)

〔解説〕

底の変換公式を用いると、

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = 2a$$

を得る。

〔解答〕 (4)

〔解説〕

$2\int_0^1 tg(t)dt = k$ とおくと, $f(x) = x - k$ となる。これを $g(x)$ に代入すると

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \int_0^x (t - k) dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 - kx + 1 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} k &= 2\int_0^1 tg(t)dt \\ \Leftrightarrow k &= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^3 - kt^2 + t \right) dt \\ \Leftrightarrow k &= 2\left(\frac{1}{8} - \frac{k}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。これより, $f(x) = x - \frac{3}{4}$ を得る。

〔解答〕 (1)

〔解説〕

A, B から x 軸におろした垂線の足を P, Q とおく。図 1 より, 求める立体の体積 V は,

$V = \triangle OAP$ の x 軸周りの回転体の体積 + 線分 AP, BQ, PQ, 弧 AB で囲まれた部分の x 軸周りの回転体の体積 - $\triangle OBQ$ の x 軸周りの回転体の体積

となる。

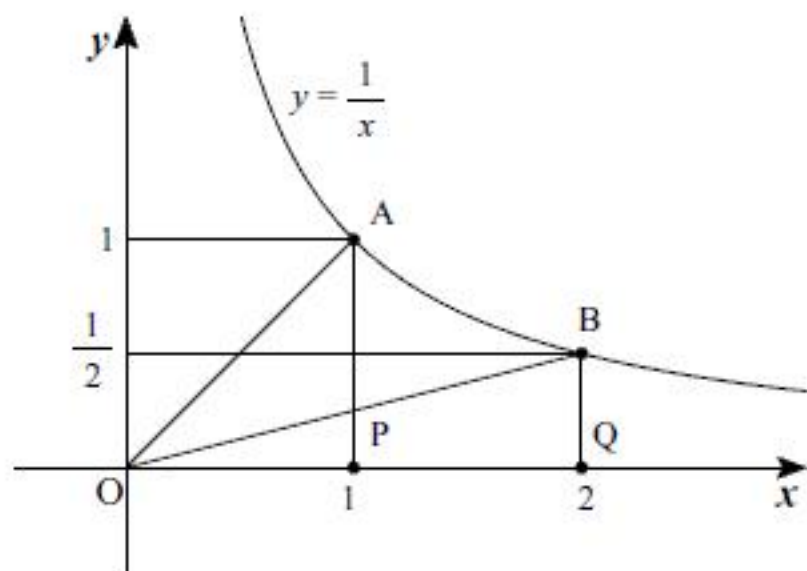


図 1

したがって,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}OP \cdot \pi AP^2 + \int_1^2 \pi \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3}OQ \cdot \pi BQ^2 \\ &= \frac{1}{3}\pi + \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 - \frac{1}{6}\pi \\ &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

1 3

〔解答〕 (2)

〔解説〕

面積の公式により、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} |2(t+1) - 3 \cdot 2t| = |1 - 2t|$$

となる。これが 3 に等しいとき、

$$1 - 2t = \pm 3 \Leftrightarrow t = -1, 2$$

$t > 0$ より、 $t = 2$ である。

〔解答〕 (3)

〔解説〕

$\triangle ABD$, $\triangle CBD$ について余弦定理を用い, BD を 2 通りに表す。

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle DAB \quad \dots \textcircled{1}$$

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cos \angle DCB \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで, 円に内接する四角形の性質より

$$\cos \angle DCB = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

であることを用いると,

$$BD^2 = 10^2 + 1^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1 \cos \alpha \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$BD^2 = 9^2 + 1^2 + 2 \cdot 9 \cdot 1 \cos \alpha \quad \dots \textcircled{2}'$$

となる。 $\textcircled{1}' - \textcircled{2}'$ より BD を消去して整理すると,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

を得る。

〔解答〕 (1)

〔解説〕

与えられた漸化式より、

$$a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} = n+1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②-①より、

$$a_{n+3} - a_n = 1$$

を得る。したがって、 m を自然数として $b_m = a_{3m-2}$ とおくと、 $\{b_m\}$ は初項 $a_1 = 1$ 、公差1の等差数列になる。よって、

$$a_{100} = b_{34} = 34$$

となる。