

1

(1)

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - xy = 3$$

となるから、 $x+y=s$, $xy=t$ とおくとき

$$s^2 - t = 3$$

$$\Leftrightarrow t = s^2 - 3$$

である。

(1) の 答	$t = s^2 - 3$
---------------	---------------

(2)

$x+y=s$, $xy=t$ とおくとき、解と係数の関係より実数 x, y を解にもつ p についての 2 次方程式は

$$p^2 - sp + t = 0$$

となるから、実数 x, y が存在するとき、この方程式の判別式を D とおくと

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 4t \geq 0$$

が成り立つ。さらに(1)の結果を用いて

$$s^2 - 4(s^2 - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (s+2)(s-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq s \leq 2$$

となる。

(2) の 答	$-2 \leq s \leq 2$
---------------	--------------------

(3)

$x^2 + y^2 + x + y = k$ とおくとき

$$k = x^2 + y^2 + x + y$$

$$= (x+y)^2 - 2xy + x + y$$

となるから、 $x+y=s$, $xy=t$ とおくとき、(1)の結果も用いて

$$k = s^2 - 2t + s$$

$$= s^2 - 2(s^2 - 3) + s$$

$$= -s^2 + s + 6$$

と表される。

(3) の 答	$k = -s^2 + s + 6$
---------------	--------------------

(4)

(3)の結果を用いて

$$k = -s^2 + s + 6$$

$$= -\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

となる。(2)の結果より $-2 \leq s \leq 2$ であるから、 k は

$$s = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } M = \frac{25}{4}$$

$$s = -2 \text{ のとき最小値 } m = 0$$

をとる。

(4) の 答	$M = \frac{25}{4}$
	$m = 0$

2

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a(-3x^2 + x + 4) - 7b(x - 2)}{3x^3 - 7x^2 - 2x + 8} \\ &= \frac{-3ax^2 + (a - 7b)x + (4a + 14b)}{(x - 2)(x + 1)(3x - 4)} \end{aligned}$$

について

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{3x - 4} \\ &= \frac{(3A + 3B + C)x^2 + (-A - 10B - C)x + (-4A + 8B - 2C)}{(x - 2)(x + 1)(3x - 4)} \end{aligned}$$

となるとき

$$\begin{cases} 3A + 3B + C = -3a \\ -A - 10B - C = a - 7b \\ -4A + 8B - 2C = 4a + 14b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (A, B, C) = (-a, b, -3b)$$

となる。

(1) の 答	$A = -a$
	$B = b$
	$C = -3b$

(2)

$2a + 7b = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-3ax^2 + 3ax}{(x - 2)(x + 1)(3x - 4)} \\ &= \frac{-3ax(x - 1)}{(x - 2)(x + 1)(3x - 4)} \end{aligned}$$

となる。方程式 $f(x) = 0$ について、 $x \neq -1, \frac{4}{3}, 2$ のもとで

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3ax(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, 1 \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、方程式 $f(x) = 0$ の解 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) は

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

である。

(2) の 答	$x_1 = 0$
	$x_2 = 1$

(3)

(2)において $a = 7$ とするとき $b = -2$ である。(1)の結果を用いて、 $A = -7, B = -2, C = 6$ となるから

$$f(x) = -\frac{7}{x - 2} - \frac{2}{x + 1} + \frac{6}{3x - 4}$$

である。よって、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{7}{x - 2} - \frac{2}{x + 1} + \frac{6}{3x - 4} \right) dx \\ &= \left[-7 \log|x - 2| \right]_0^1 + \left[-2 \log|x + 1| \right]_0^1 + \left[2 \log|3x - 4| \right]_0^1 \\ &= 7 \log 2 - 2 \log 2 - 2 \log 4 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(3) の 答	$I = \log 2$
---------------	--------------

3

(1)

$$f(x)=x^3-3x^2+3ax+b \text{ について}$$

$$f'(x)=3x^2-6x+3a$$

である。 $f(x)$ が極値を持つのは方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解を持つときであるから、 $f'(x)=0$ の判別式を D とおくと

$$D>0$$

$$\Leftrightarrow 1-a>0$$

$$\Leftrightarrow a<1$$

となる。

(1) の 答	$a<1$
---------------	-------

(2)

$$f'(x)=0 \text{ の解を } \alpha, \beta \text{ } (\alpha<\beta) \text{ とおくと、解と係数の関係より}$$

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=a$$

となる。このとき、 $\alpha-\beta<0$ であるから

$$\begin{aligned} \alpha-\beta &= -\sqrt{(\alpha-\beta)^2} \\ &= -\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \\ &= -\sqrt{2^2-4a} \text{ } (\because a<1) \\ &= -2\sqrt{1-a} \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ の極大値は $f(\alpha)$ 、極小値は $f(\beta)$ であるから、この差が 32 となるとき

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta) &= 32 \\ \Leftrightarrow (\alpha^3-\beta^3)-3(\alpha^2-\beta^2)+3a(\alpha-\beta) &= 32 \\ \Leftrightarrow (\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)+3a\} &= 32 \\ \Leftrightarrow (\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+3a\} &= 32 \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{1-a}(2^2-a-3\cdot 2+3a) &= 32 \\ \Leftrightarrow (1-a)^{\frac{3}{2}} &= 8 \\ \Leftrightarrow 1-a &= 4 \\ \Leftrightarrow a &= -3 \end{aligned}$$

となる。

(2) の 答	$a=-3$
---------------	--------

(3)

$$a=-3 \text{ であるとき、 } f(x)=x^3-3x^2-9x+b \text{ となり}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6x-9 \\ &= 3(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

となるから、 $-4\leq x\leq 4$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-4	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$b-76$	$\nearrow$	$b+5$	$\searrow$	$b-27$	$\nearrow$	$b-20$

$b+5>b-20$ であるから最大値は $b+5$ となり、これが 5 であるとき

$$\begin{aligned} b+5 &= 5 \\ \Leftrightarrow b &= 0 \end{aligned}$$

となる。このとき $f(x)$ の最小値 m は

$$\begin{aligned} m &= b-76 \\ &= -76 \end{aligned}$$

である。

(3) の 答	$b=0$
	$m=-76$

(1)

$$S_n = 1 - (2n^2 + n - 1)a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つとき、 $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \{1 - (2n^2 + n - 1)a_n\} - \left[1 - \{2(n-1)^2 + (n-1) - 1\}a_{n-1}\right] \\ &= -(2n^2 + n - 1)a_n + (2n^2 - 3n)a_{n-1} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} (2n^2 + n)a_n &= (2n^2 - 3n)a_{n-1} \\ \Leftrightarrow (2n+1)a_n &= (2n-3)a_{n-1} \quad (\because n \neq 0) \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1} \quad (\because 2n+1 \neq 0) \end{aligned}$$

である。

(1) の 答	$a_n = \frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1}$
---------------	----------------------------------

(2)

①より

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - (2 \cdot 1^2 + 1 - 1)a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= 1 - 2a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。(1)の結果を用いて、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1} \\ &= \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1}a_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} \cdots \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5}a_1 \\ &= \frac{3}{(2n+1)(2n-1)}a_1 \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ を代入したとき $a_1 = \frac{1}{3}$ を満たすから

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \quad (n \geq 1)$$

である。

(2) の 答	$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$
---------------	--------------------------------

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{20} (2n+1)(2n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{20} (4n^2 - 1) \\ &= 4 \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 20 \\ &= 11460 \end{aligned}$$

となる。

(3) の 答	$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = 11460$
---------------	---

(1)

実数 x について $e^x > 0, e^{-x} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} t &= e^x + e^{-x} \\ &\geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。ただし, 等号は

$$\begin{aligned} e^x &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

のとき成立する。以上より, t のとり得る値の最小値 m は

$$m = 2$$

である。

(1) の 答	$m = 2$
---------------	---------

(2)

$t = e^x + e^{-x}$ のとき

$$\begin{aligned} t^2 &= e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} \\ &= e^{2x} + e^{-2x} + 2 \end{aligned}$$

であるから

$$e^{2x} + e^{-2x} = t^2 - 2$$

と表される。

(2) の 答	$e^{2x} + e^{-2x} = t^2 - 2$
---------------	------------------------------

(3)

$t = e^x + e^{-x}$ とおくと $x = \log s$ のとき

$$\begin{aligned} t &= e^{\log s} + e^{-\log s} \\ &= s + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{array}{c|cc} \frac{dt}{dx} & e^x - e^{-x} & \\ \hline x & \log 2 & \rightarrow \log 4 \\ t & \frac{5}{2} & \rightarrow \frac{17}{4} \end{array}$$

となる。よって, (2)の結果も用いて

$$\begin{aligned} I &= \int_{\log 2}^{\log 4} \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 1} dx \\ &= \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{17}{4}} \frac{2}{(t^2 - 2) + 1} dt \\ &= \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{17}{4}} \frac{2}{(t+1)(t-1)} dt \\ &= \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{17}{4}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\log|t-1| - \log|t+1| \right]_{\frac{5}{2}}^{\frac{17}{4}} \\ &= \log \frac{13}{4} - \log \frac{21}{4} - \log \frac{3}{2} - \log \frac{7}{2} \\ &= \log \frac{13}{9} \end{aligned}$$

である。

(3) の 答	$I = \log \frac{13}{9}$
---------------	-------------------------

(4)

$t = e^x + e^{-x}, b = e^a + e^{-a}$ とおくと, (2)の結果を用いると

$$e^{2a} + e^{-2a} = b^2 - 2$$

であるから

$$\begin{array}{c|cc} \frac{dt}{dx} & e^x - e^{-x} & \\ \hline x & a & \rightarrow 2a \\ t & b & \rightarrow b^2 - 2 \end{array}$$

となる。ここで, $I_a = \int_a^{2a} \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 1} dx$ とおくと, (3)の過程を用いて

$$\begin{aligned} I_a &= \int_b^{b^2-2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\log|t-1| - \log|t+1| \right]_b^{b^2-2} \\ &= \log|b^2-3| - \log|b^2-1| - \log|b-1| + \log|b+1| \end{aligned}$$

となる。ここで, a が実数であるとき(1)の結果を用いて

$$b \geq 2$$

であるから

$$\begin{aligned} I_a &= \log(b^2-3) - \log(b^2-1) - \log(b-1) + \log(b+1) \\ &= \log \frac{(b^2-3)(b+1)}{(b^2-1)(b-1)} \\ &= \log \frac{b^2-3}{(b-1)^2} \end{aligned}$$

となる。 $I_a = \log \frac{3}{2}$ となるとき

$$\begin{aligned} \log \frac{b^2-3}{(b-1)^2} &= \log \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{b^2-3}{(b-1)^2} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow b^2 - 6b + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 3 \end{aligned}$$

であるから, $b = e^a + e^{-a}$ より

$$e^a + e^{-a} = 3$$

となる。

(4) の 答	$e^a + e^{-a} = 3$
---------------	--------------------