

(注意) 解答用紙に途中の計算を明記せよ。解答枠の用意されている設問については枠内に解答を記入せよ。

1 実数 x, y について、関係式 $x^2 + xy + y^2 = 3$ が成り立つとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) $x + y = s, xy = t$ とおくとき、 t を s の式で表せ。
- (2) s のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $x^2 + y^2 + x + y = k$ とおくとき、 k を s の式で表せ。
- (4) k のとり得る値の最大値 M と最小値 m を求めよ。

2 関数 $f(x) = \frac{a(-3x^2 + x + 4) - 7b(x - 2)}{3x^3 - 7x^2 - 2x + 8}$ について、次の問に答えよ。ただし、 a, b は 0 でない定数とする。

- (1) $f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{3x-4}$ (A, B, C は定数) となるとき、 A, B, C を a と b の式で表せ。
- (2) $2a + 7b = 0$ のとき、 $f(x) = 0$ の解 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) を求めよ。
- (3) (2) において $a = 7$ とするとき、定積分 $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ を求めよ。

3 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3ax + b$ (a, b は定数) について、次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ が極値を持つような a の値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるとき、 a の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた a の値に対し、 $f(x)$ の区間 $-4 \leq x \leq 4$ における最大値が 5 であるとする。このとき、 b の値とこの区間での $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$S_n = 1 - (2n^2 + n - 1)a_n \quad (n \geq 1)$$

が成り立つとき、次の問に答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、 a_n を a_{n-1} と n を用いて表せ。
- (2) a_n を n を用いて表せ。
- (3) $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

5 実数 x に対して, $t = e^x + e^{-x}$ とするとき, 次の問に答えよ。

(1) t のとり得る値の最小値 m を求めよ。

(2) $e^{2x} + e^{-2x}$ を t の式で表せ。

(3) $t = e^x + e^{-x}$ において置換積分することにより, 定積分 $I = \int_{\log 2}^{\log 4} \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 1} dx$ を求めよ。

(4) 定数 a に対して, $\int_a^{2a} \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 1} dx = \log \frac{3}{2}$ となるとき, $e^a + e^{-a}$ の値を求めよ。

(a の値は求めなくてよい。)