

1

【解答】

(1) (c) (2) (d) (3) (b) (4) (c) (5) (a)

(6) (f) (7) (c) (8) (a) (9) (c) (10) (a)

【解説】

(1)

$x = \log_2(1 + \sqrt{3})$ のとき

$$2^x = 1 + \sqrt{3}$$

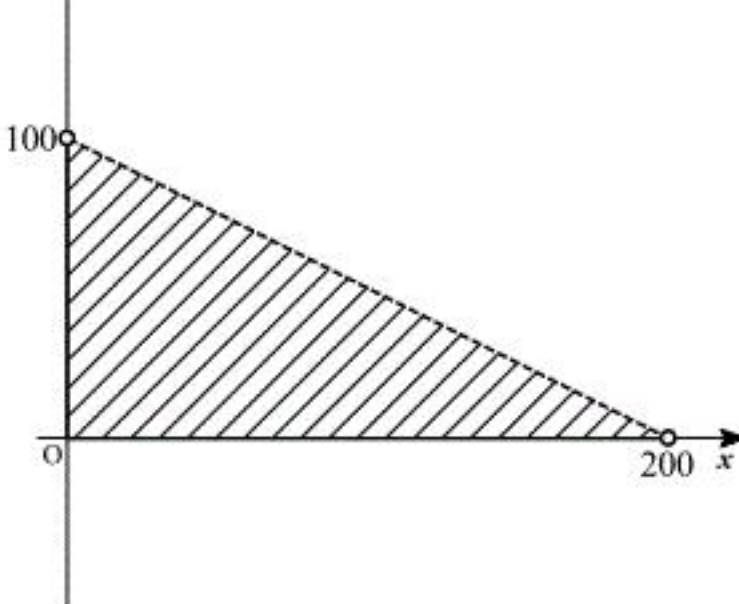
となるから

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x+2} &= (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 - 4(1 + \sqrt{3}) \\ &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y < 200$ を満たす整数 x, y は下図の斜線部(ただし、境界は実線のみ含む)に含まれる格子点の個数に一致する。



この領域に含まれる、直線 $y = k$ (k は整数) 上の格子点の個数は

$$0 \leq x < 200 - 2k$$

を満たす整数 x の個数に等しく

$$0 \leq k \leq 99 \text{ のとき } 200 - 2k \text{ 個}$$

$$k < 0, 99 < k \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

である。よって、求める x, y の組の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{99} (200 - 2k) &= 20000 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100 \\ &= 10100 \end{aligned}$$

となる。

(3)

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \sqrt{2}a_n + \sqrt{2} - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき

$$a_{n+1} = \sqrt{2}a_n + \sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 1 = \sqrt{2}(a_n + 1)$$

となるから、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 3$ 、公比 $\sqrt{2}$ の等比数列となる。よって

$$a_n + 1 = 3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} - 1$$

となり

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3 \cdot (\sqrt{2})^{10} - 1 \\ &= 95 \end{aligned}$$

である。

(4)

$$|x(x-3)| = \begin{cases} x(x-3) & (x < 0, 3 < x) \\ -x(x-3) & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^4 |x(x-3)| dx &= \int_0^3 \{-x(x-3)\} dx + \int_3^4 x(x-3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4 \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

となる。

(5)

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{2}|\vec{p} - \vec{a}| \\ \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 &= 2|\vec{p} - \vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 &= 2(|\vec{p}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{a}) \\ \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 + 2|\vec{a}|^2 - 4\vec{p} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{p} - 2\vec{a}|^2 &= 2|\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{p} - 2\vec{a}| &= \sqrt{2}|\vec{a}| \end{aligned}$$

となり、このベクトル方程式は中心の位置ベクトルが $2\vec{a}$ 、半径が $\sqrt{2}|\vec{a}|$ である円を表す。

(6)

ABCD が平行四辺形であるとき

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

となるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= (1, 2, -1) - (3, 4, -1) + (3, 2, 1) \\ &= (1, 0, 1) \end{aligned}$$

である。よって、点 D の座標は $(1, 0, 1)$ となる。

(7)

放物線 $y = x^2$ 上の点の座標は実数 t を用いて (t, t^2) と表される。中心 $(0, a)$ 、半径 a の円と放

物線 $y = x^2$ は必ず原点を共有点にもつから、この円と放物線との共有点が原点のみとなる

とき、 $t \neq 0$ において 2 点 $(t, t^2), (0, a)$ 間の距離が半径 a よりも大きくなる。よって、 $t \neq 0$ である

すべての実数 t に対して

$$\begin{aligned} (t-0)^2 + (t^2-a)^2 &> a^2 \\ \Leftrightarrow t^4 - (2a-1)t^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow t^2 > 2a-1 & (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

が成り立ち、この式が成立するための必要十分条件は $a > 0$ であることも考慮して

$$2a-1 \leq 0 \text{ かつ } a > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

となる。

(8)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x)(\sin x)' dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

である。

(9)

$f(x) = a \log x$ とおく

$$f'(x) = \frac{a}{x}$$

であるから、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a}{p}x + a \log p - a \end{aligned}$$

となる。直線 $y = 4x$ が曲線 $y = f(x)$ に接するとき、その接点を $(p, f(p))$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{a}{p} = 4 \\ a \log p - a = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4p \\ a(\log p - 1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4p \\ \log p = 1 \quad (\because a > 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, p) = (4e, e) \end{aligned}$$

となる。

(10)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{6} & -\sin \frac{n\pi}{6} \\ \sin \frac{n\pi}{6} & \cos \frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$$

である。よって

$$\begin{aligned} 2^{-25} A^{25} &= 2^{-25} \cdot 2^{25} \begin{pmatrix} \cos \frac{25\pi}{6} & -\sin \frac{25\pi}{6} \\ \sin \frac{25\pi}{6} & \cos \frac{25\pi}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

- (1) ① (2) ① (3) ②

〔解説〕

さいころを投げたとき、すべての目の出方は同様に確からしいとする。このとき、さいころを投げて3の倍数の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ 、3の倍数以外の目が出る確率は $\frac{2}{3}$ となる。

(1)

さいころを n 回投げて、3の倍数の目がちょうど k 回($k=1, 2, 3, \dots, n$)出るとき、3の倍数以外の目は $n-k$ 回出る。この目の出る順は ${}_nC_k$ 通りあるから、求める確率は

$${}_nC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = {}_nC_k \frac{2^{n-k}}{3^n}$$

となる。

(2)

さいころを n 回投げて3の倍数の目がちょうど k 回出るときの Y_n の値を $Y_{n,k}$ とすると、

$$Y_{n,k} = 3^k (-1)^{n-k}$$

であり、(1)より、このようになる確率は ${}_nC_k \frac{2^{n-k}}{3^n}$ である。したがって、 Y_n の期待値 E_n は

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^n Y_{n,k} \cdot {}_nC_k \frac{2^{n-k}}{3^n} \\ &= \sum_{k=0}^n 3^k \cdot (-1)^{n-k} \cdot {}_nC_k \frac{2^{n-k}}{3^n} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot 1^k \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

であるから、二項定理より

$$\begin{aligned} E_n &= \left(1 - \frac{2}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} E_n &= \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) \end{aligned}$$

となる。

3

【解答】

- (1) ㉔ (2) ㉒ (3) ㉑

【解説】

- (1) 線分 OP を $a:(1-a)$ に内分する点を Q とおくと、 Q の座標は

$$\left(\frac{(1-a) \cdot 0 + a \cdot t}{a + (1-a)}, \frac{(1-a) \cdot 0 + a \cdot (1-a)}{a + (1-a)} \right) = (at, a(1-a))$$

となる。ここで、 $0 < a < 1$ であるとき

$$\overrightarrow{OP} = (t, 1-a)$$

は $\vec{0}$ ではない。よって、点 Q を通り、 OP に垂直な直線 l_t は、点 $Q(at, a(1-a))$ を通り、

$\overrightarrow{OP} = (t, 1-a)$ を法線ベクトルにもつ直線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned} t(x-at) + (1-a)\{y-a(1-a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow tx + (1-a)y - at^2 - a(1-a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。

- (2)

直線 l_t 上の点を (x, y) とおくと

$$\begin{aligned} tx + (1-a)y - at^2 - a(1-a)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow at^2 - xt - (1-a)y + a(1-a)^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、 t が実数全体を動くとき直線 l_t が通る点全体の領域を表す不等式は、 $\textcircled{1}$ を t についての方程式とみたとき、 $\textcircled{1}$ が実数解をもつような (x, y) の満たす不等式にあたる。 $\textcircled{1}$ の判別式を D とおくと、 $\textcircled{1}$ が実数解をもつとき

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4a\{-(1-a)y + a(1-a)^2\} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4a(1-a)y - 4a^2(1-a)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{4a(1-a)} + y - a(1-a) &\geq 0 \quad (\because 0 < a < 1) \\ \Leftrightarrow y &\geq -\frac{x^2}{4a(1-a)} + a(1-a) \end{aligned}$$

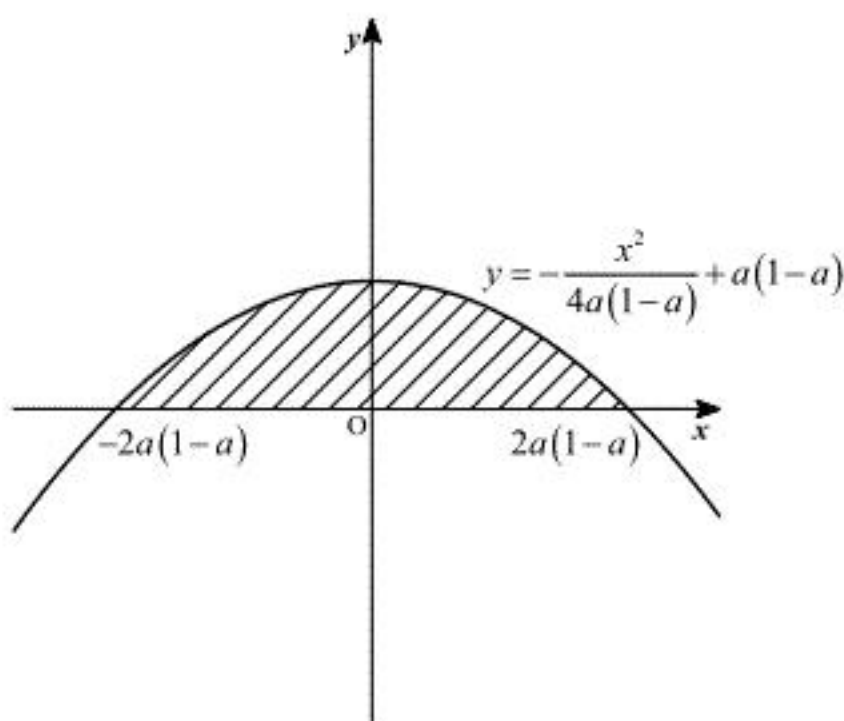
となる。

- (3)

(2) で求めた領域の境界線の方程式は

$$y = -\frac{x^2}{4a(1-a)} + a(1-a) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $0 < a < 1$ のとき $\frac{1}{4a(1-a)} > 0$ 、 $a(1-a) > 0$ であることより、 $\textcircled{2}$ と x 軸で囲まれた部分は下図の斜線部である。



$\textcircled{2}$ と x 軸の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{4a(1-a)} + a(1-a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4a^2(1-a)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x + 2a(1-a)\}\{x - 2a(1-a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 2a(1-a) \end{aligned}$$

となる。 $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-2a(1-a)}^{2a(1-a)} \left\{ -\frac{x^2}{4a(1-a)} + a(1-a) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{4a(1-a)} \int_{-2a(1-a)}^{2a(1-a)} \{x + 2a(1-a)\}\{x - 2a(1-a)\} dx \\ &= -\frac{1}{4a(1-a)} \left[-\frac{\{2a(1-a) + 2a(1-a)\}^3}{6} \right] \\ &= \frac{8}{3}(a^2 - a)^2 \\ &= \frac{8}{3} \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\}^2 \end{aligned}$$

となる。 a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ において最大値

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

をとる。

〔解答〕

- (1) ㉔ (2) ㉓ (3) ㉑

〔解説〕

(1)

 $f(x) = \int_x^{\infty} \sqrt{1-t^2} dt$ のとき

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{a}\right) + \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{1-t^2} dt &= \int_{\frac{1}{a}}^1 \sqrt{1-t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

となり、これは半径1の円の面積の $\frac{1}{4}$ に等しいから

$$f\left(\frac{1}{a}\right) + \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

となる。

(2)

 $f(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{1-t^2} dt - \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\sqrt{1-(ax)^2} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{a^2(1-a^2x^2) - (1-x^2)}{a\sqrt{1-(ax)^2} + \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(a^2-1)\{1-(a^2+1)x^2\}}{a\sqrt{1-(ax)^2} + \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - (a^2+1)x^2 &= 0 \quad (\because a > 1) \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{a^2+1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{1}{a}) \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)の結果を用いて、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$	...	$\frac{1}{a}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

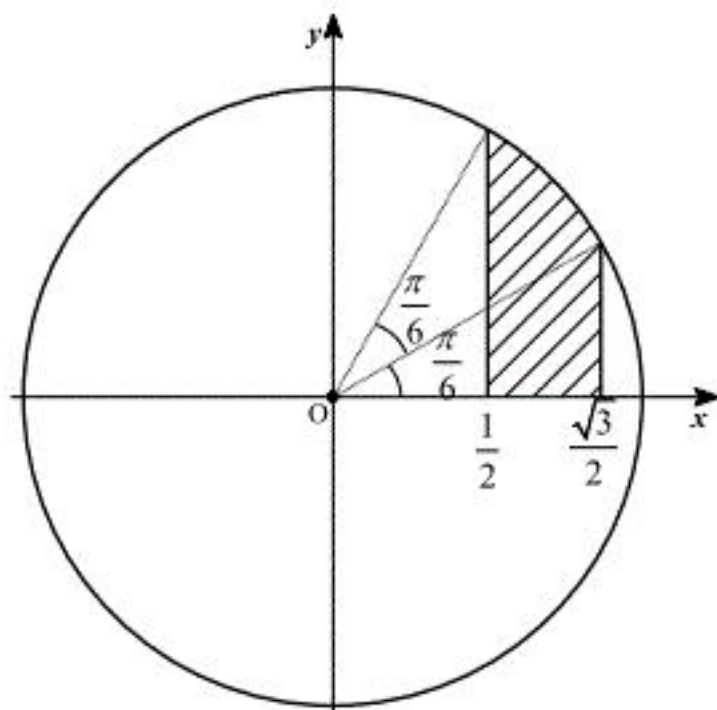
 $f(x)$ が $x = \frac{\sqrt{3}}{2a}$ で最大値をとるとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} &= \frac{\sqrt{3}}{2a} \\ \Leftrightarrow 2a &= \sqrt{3(a^2+1)} \\ \Leftrightarrow 4a^2 &= 3(a^2+1) \quad (\because a > 1) \\ \Leftrightarrow a^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{3} \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

である。このとき $f(x)$ が最大値をとる x の値は $x = \frac{1}{2}$ となり、最大値 M は

$$\begin{aligned} M &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

となる。これは下図の斜線部の領域の面積に等しい。



よって

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。