

〔解答〕

(1) c (2) c (3) e (4) a

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{2+\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}-2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

である。

(2)

$$xy+3x-2y-70=0 \Leftrightarrow (x-2)(y+3)=64$$

である。 x, y は自然数なので、

$$x-2 \geq -1, y+3 \geq 4$$

である。このような条件を満たす $(x-2, y+3)$ の組合せは、

$$(1, 64), (2, 32), (4, 16), (8, 8), (16, 4)$$

の5つであるから、 x, y の組の総数は5つである。

(3)

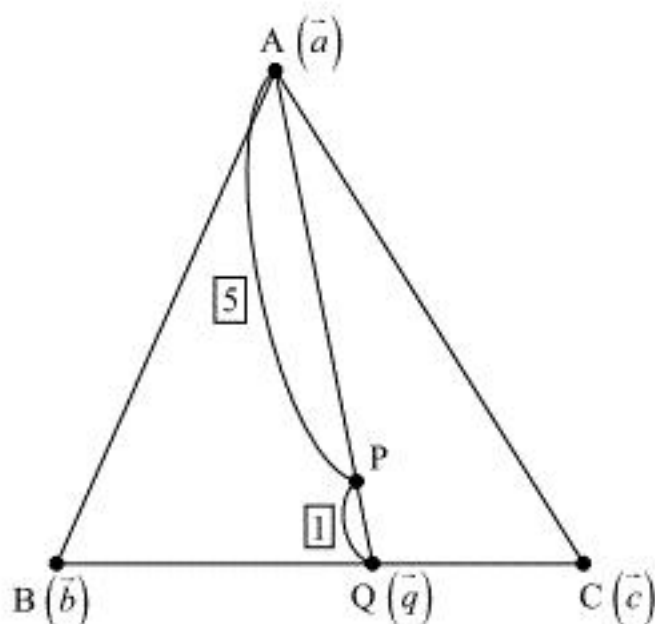
$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}}{6} \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}\end{aligned}$$

である。

$$\vec{q} = \frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}$$

となる点 $Q(\vec{q})$ をおくと、 Q は線分 BC 上の点であり、

$$\vec{p} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{q}$$

より P は線分 AQ を $5:1$ に内分する点であることがわかる。 $\triangle ABC$ の面積が1のとき $\triangle BCP$ の面積は $\frac{1}{6}$ である。

(4)

 $\left(x^2 - \frac{1}{3x}\right)^{30}$ の展開式における一般項は

$${}_{30}C_r (x^2)^{30-r} \left(-\frac{1}{3x}\right)^r = {}_{30}C_r \left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{60-3r}$$

である。

$$60-3r=51$$

$$\Leftrightarrow r=3$$

であるので、 x^{51} の係数は

$$\begin{aligned}{}_{30}C_3 \left(-\frac{1}{3}\right)^3 &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) \\ &= -\frac{4060}{27}\end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1) f (2) d (3) a

〔解説〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ において n 番目に出てくる1は第 n 群の末項であり、第 k 群の項数は k 個であるから、 b_n は第1群から第 n 群までの項数に等しく、

$$\begin{aligned} b_{40} &= \frac{(1+40) \cdot 40}{2} \\ &= 820 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} b_{19} &= \frac{(1+19) \cdot 19}{2} \\ &= 190 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{20} &= \frac{(1+20) \cdot 20}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

より、 $a_{190}=1$ は第19群の末項であり、 $a_{210}=1$ は第20群の末項である。したがって、 a_{192} は第20群の2番目の数であり、その値は19である。

(3)

第 j 群の各項の和は $\frac{j(j+1)}{2}$ であるから、(2)より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{192} a_k &= a_{191} + a_{192} + \sum_{k=1}^{190} a_k \\ &= 20 + 19 + \sum_{j=1}^{19} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= 39 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{19} (j^2 + j) \\ &= 39 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{19 \cdot (19+1) \cdot (2 \cdot 19 + 1)}{6} + \frac{19 \cdot (19+1)}{2} \right\} \\ &= 1369 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1) d (2) e (3) b

〔解説〕

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (8, 8)$$

であるので、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}|4 \cdot 8 - 2 \cdot 8| = \frac{1}{2} \cdot |16|$$

$$= 8$$

である。

(2)

外接円の方程式を

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

とおく。外接円は点 A, B, C を通るので、

$$(-3-a)^2 + (-4-b)^2 = r^2 \quad \dots\dots ①$$

$$(1-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \quad \dots\dots ②$$

$$(5-a)^2 + (4-b)^2 = r^2 \quad \dots\dots ③$$

である。①と②を辺々引くと

$$(-3-a)^2 - (1-a)^2 + (-4-b)^2 - (-2-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8a + 4b = -20$$

$$\Leftrightarrow 2a + b = -5 \quad \dots\dots ④$$

である。②と③を辺々引くと

$$(1-a)^2 - (5-a)^2 + (-2-b)^2 - (4-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8a + 12b = 36$$

$$\Leftrightarrow 2a + 3b = 9 \quad \dots\dots ⑤$$

である。よって④、⑤より

$$a = -6, b = 7$$

である。これを①に代入すると

$$(-3+6)^2 + (-4-7)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 130$$

であるので、外接円の方程式は

$$(x+6)^2 + (y-7)^2 = 130 \quad \dots\dots ⑥$$

である。

(3)

$y = -x + k$ を⑥に代入すると

$$(x+6)^2 + (-x+k-7)^2 = 130$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (26-2k)x + k^2 - 14k - 45 = 0$$

である。この x についての方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (13-k)^2 - 2(k^2 - 14k - 45)$$

$$= -k^2 + 2k + 259$$

である。 $y = -x + k$ が外接円と共有点を持つとき、 $\frac{D}{4} \geq 0$ であるので、

$$-k^2 + 2k + 259 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{65} \leq k \leq 1 + 2\sqrt{65}$$

である。

【解答】

(1) d (2) c (3) b

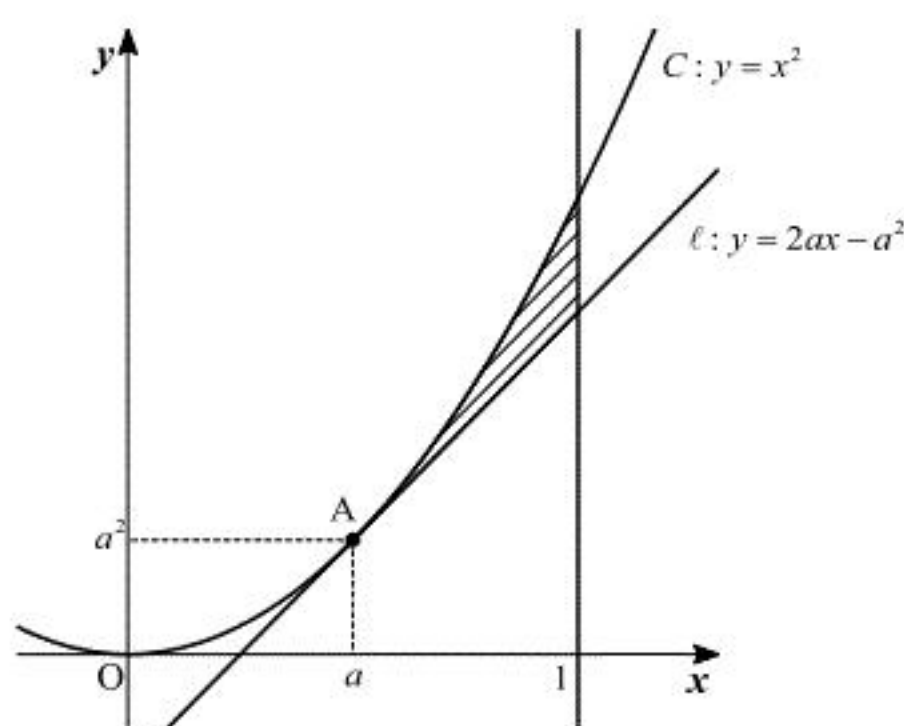
【解説】

(1)

曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

である。したがって、曲線 C と接線 ℓ 、および直線 $x=1$ で囲まれた図形は以下の斜線部のようになる。



上図より

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^1 (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \int_a^1 (x-a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x-a)^3 \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{3} (1-a)^3 \end{aligned}$$

となり、

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

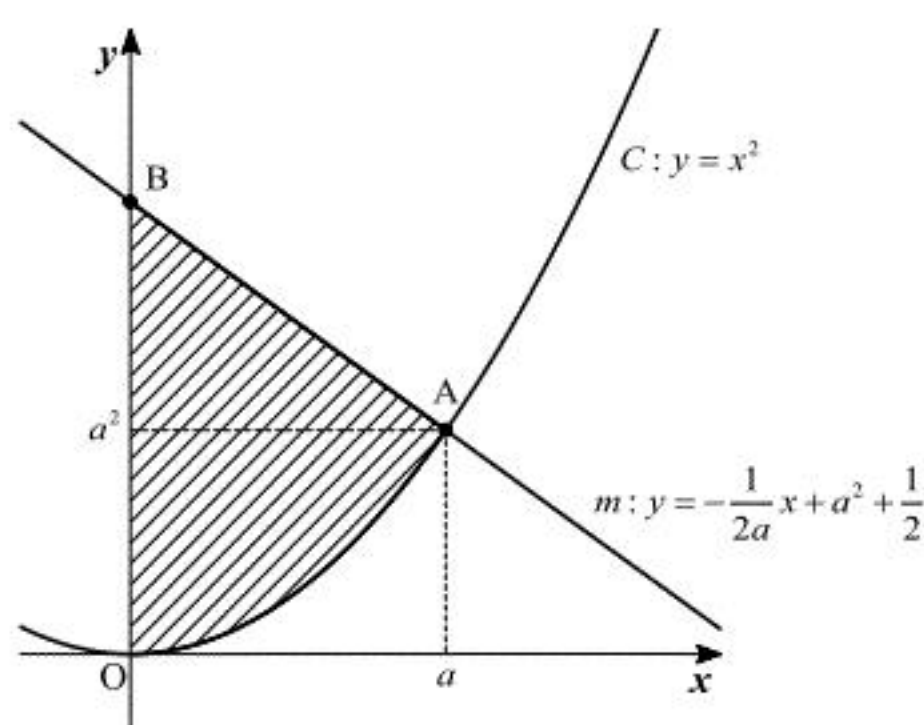
である。

(2)

直線 m は点 A を通る傾き $-\frac{1}{2a}$ の直線であるから、直線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 \\ &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、曲線 C と線分 AB 、および y 軸で囲まれた図形は以下の斜線部のようになる。



上図より

$$\begin{aligned} T(a) &= \int_0^a \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} - x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4a}x^2 + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right)x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{4}a + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right)a - \frac{1}{3}a^3 \\ &= \frac{1}{4}a + \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

である。

(3)

$$U(a) = S(a) + T(a)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} U(a) &= \frac{1}{3}(1-a)^3 + \frac{1}{4}a + \frac{2}{3}a^3 \\ &= \frac{1}{3}a^3 + a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{3} \\ U'(a) &= a^2 + 2a - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

となるが、 $0 < a < 1$ より $a = \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}$ であることに注意して増減表を書くと、

a	0	...	$\frac{-2+\sqrt{7}}{2}$	...	1
$U'(a)$	$\diagdown$	-	0	+	$\diagup$
$U(a)$	$\diagdown$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	$\diagup$

となる。したがって、 $U(a)$ を最小にする a の値は $a = \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}$ である。