

【解答】

- (1) ㉔
 (2) ㉔
 (3) ㉔
 (4) ㉔
 (5) ㉔

【解説】

(1)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{2+\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{2-\sqrt{2}}{4-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{6}-2}{6-4} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+2-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

となる。

(2)

与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}xy+3x-2y-70 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y+3)x-2(y+3)-64 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(y+3) &= 64 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。x, y は自然数であるから、 $x \geq 1, y \geq 1$ より、

$$x-2 \geq -1, y+3 \geq 4$$

が成り立つ。この範囲において、①を満たす2つの整数(x-2, y+3)の組は、

$$(x-2, y+3) = (1, 64), (2, 32), (4, 16), (8, 8), (16, 4)$$

の5つ存在することから、①を満たす自然数x, yの組の総数は5である。

(3)

直線APと辺BCの交点をDとする。自然数kを用いて $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP}$ とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= k\overrightarrow{AP} \\ &= k(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}) \\ &= k\left(-\frac{5}{6}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) \\ &= \frac{1}{3}k(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})+\frac{1}{2}k(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}) \\ &= \frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

が成り立つ。点Dは辺BC上の点であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}k+\frac{1}{2}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

となる。したがって $AP:PD=5:1$ である。ここで、 $\triangle ABC$ と $\triangle BCP$ の面積比は、辺BCを底辺としたときの三角形の高さの比、すなわちADとPDの比に等しい。以上より、

$$AD:PD=6:1$$

であるから、 $\triangle BCP$ の面積は $\triangle ABC$ の $\frac{1}{6}$ であり

$$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

と求まる。

(4)

二項定理より、

$$\begin{aligned}\left(x^2-\frac{1}{3x}\right)^{30} &= \sum_{k=0}^{30} {}_{30}C_k (x^2)^k \left(-\frac{1}{3x}\right)^{30-k} \\ &= \sum_{k=0}^{30} {}_{30}C_k \left(-\frac{1}{3}\right)^{30-k} x^{3k-30}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 x^{51} の項について、

$$\begin{aligned}3k-30 &= 51 \\ \Leftrightarrow 3k &= 81 \\ \therefore k &= 27\end{aligned}$$

より、求める x^{51} の係数は、

$$\begin{aligned}{}_{30}C_{27} \left(-\frac{1}{3}\right)^{30-27} &= {}_{30}C_3 \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!} \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) \\ &= -\frac{4060}{27}\end{aligned}$$

である。

(5)

部分積分法を利用して計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{-x} dx &= \int_0^2 x(-e^{-x})' dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^2 + [-e^{-x}]_0^2 \\ &= 1 - \frac{3}{e^2}\end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

- (1) ⑥
 (2) ④
 (3) ③

【解説】

(1)

$a_n = 1$ となるのは第 k 群の末尾の項のみであるから、 b_k は第 1 群から第 k 群までの項数の総和となる。第 k 群の項の数は k 個であるから、 b_k の一般項は

$$\begin{aligned} b_k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k \\ &= \frac{1}{2}k(k+1) \end{aligned}$$

となり、ここに $k = 40$ を代入すると、

$$\begin{aligned} b_{40} &= \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 41 \\ &= 820 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$$\begin{aligned} b_{19} &= \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 = 190 \\ b_{20} &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \end{aligned}$$

であるから、 a_{192} は第 20 群の第 2 項である。第 20 群の初項は 20 であるから、

$$\begin{aligned} a_{192} &= 20 - 1 \\ &= 19 \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

第 k 群に含まれる数の総和は、

$$k + (k-1) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}k(k+1)$$

と表されるため、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{192} a_k &= \sum_{k=1}^{19} \frac{1}{2}k(k+1) + a_{191} + a_{192} \\ &= \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k \right) + 20 + 19 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 39 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 + 20 + 19 \\ &= 1369 \end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

- (1) ㉔
 (2) ㉓
 (3) ㉖

【解説】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (8, 8)$$

と表されるため、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(4^2 + 2^2)(8^2 + 8^2) - (4 \cdot 8 + 2 \cdot 8)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{20 \cdot 128 - 48^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{256} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$\triangle ABC$ の外接円の方程式は、

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

と表される。この円が 3 点 $(-3, -4)$, $(1, -2)$, $(5, 4)$ を通ることから、

$$\begin{cases} 9 + 16 - 3p - 4q + r = 0 & \cdots \text{①} \\ 1 + 4 + p - 2q + r = 0 & \cdots \text{②} \\ 25 + 16 + 5p + 4q + r = 0 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

が成り立つ。①, ②, ③を解くと

$$p = 12, q = -14, r = -45$$

と求まるため、求める円の方程式は

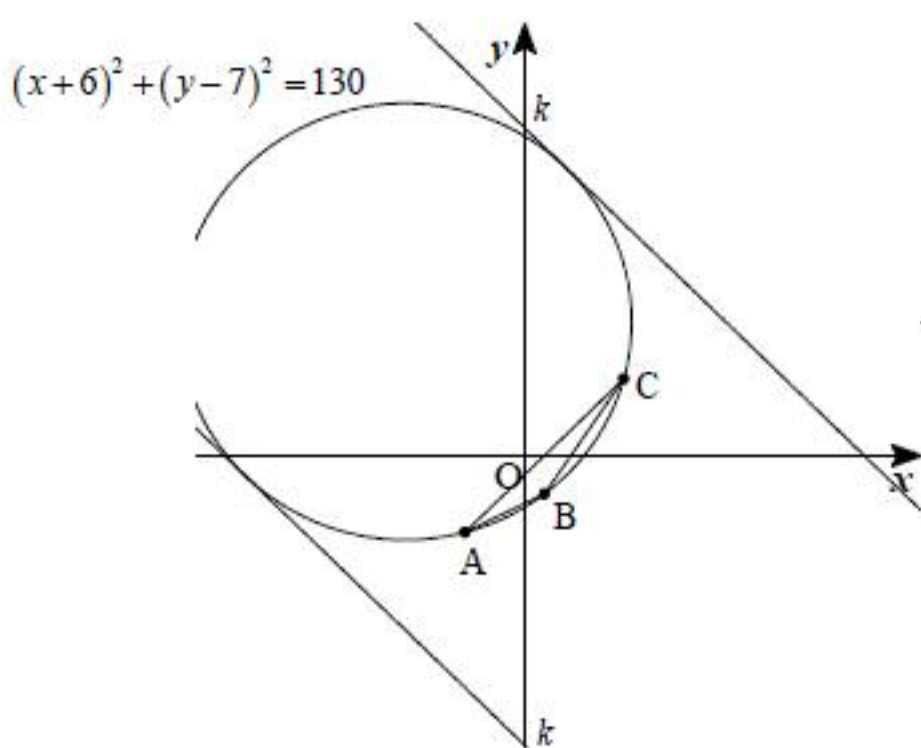
$$x^2 + y^2 + 12x - 14y - 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-7)^2 = 130$$

である。

(3)

直線 $y = -x + k$ が $\triangle ABC$ の外接円と共有点をもつような定数 k の最大値および最小値は、それぞれ以下の図のように、直線と外接円が接するときの直線の y 切片に等しい。



(2)で求めた外接円の方程式 $x^2 + y^2 + 12x - 14y - 45 = 0$ に $y = -x + k$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (-x+k)^2 + 12x - 14(-x+k) - 45 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2kx + 12x + k^2 + 14x - 14k - 45 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (26-2k)x + k^2 - 14k - 45 &= 0 \quad \cdots \text{④} \end{aligned}$$

となる。④の判別式を D とすると、直線と外接円が接するとき、 $D=0$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (13-k)^2 - 2(k^2 - 14k - 45) &= 0 \\ \Leftrightarrow -k^2 + 2k + 259 &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 2k - 259 &= 0 \\ \therefore k &= 1 \pm 2\sqrt{65} \end{aligned}$$

となる。以上より、直線 $y = -x + k$ が $\triangle ABC$ の外接円と共有点をもつような定数 k の範囲は

$$1 - 2\sqrt{65} \leq k \leq 1 + 2\sqrt{65}$$

である。

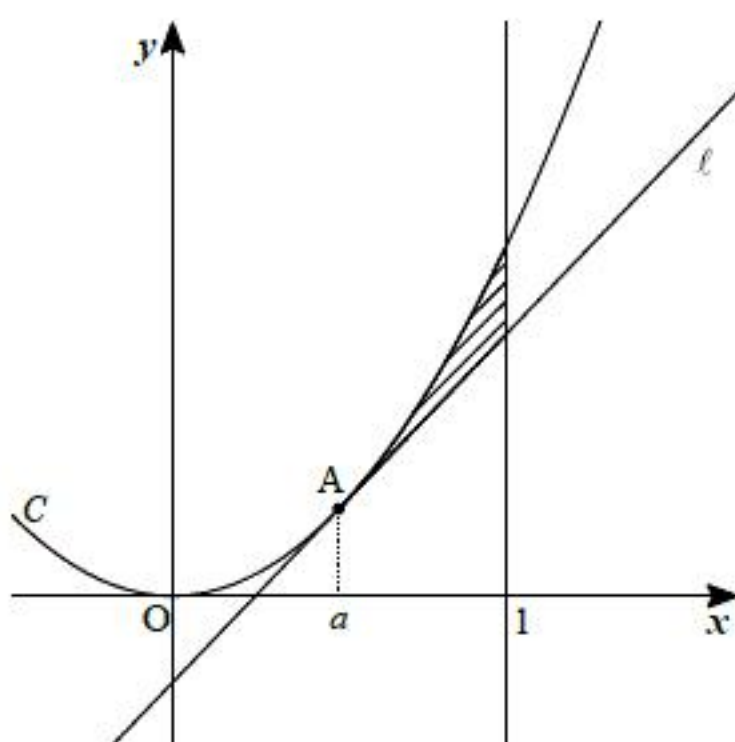
【解答】

- (1) ④
 (2) ③
 (3) ⑥

【解説】

(1)

曲線 C 、直線 ℓ 、直線 $x=1$ のグラフは以下の図のようになり、これらで囲まれた図形は以下の図の斜線部である。



方程式 $y=x^2$ の両辺を x で微分すると、

$$y' = 2x$$

となるため、直線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^1 (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_a^1 \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

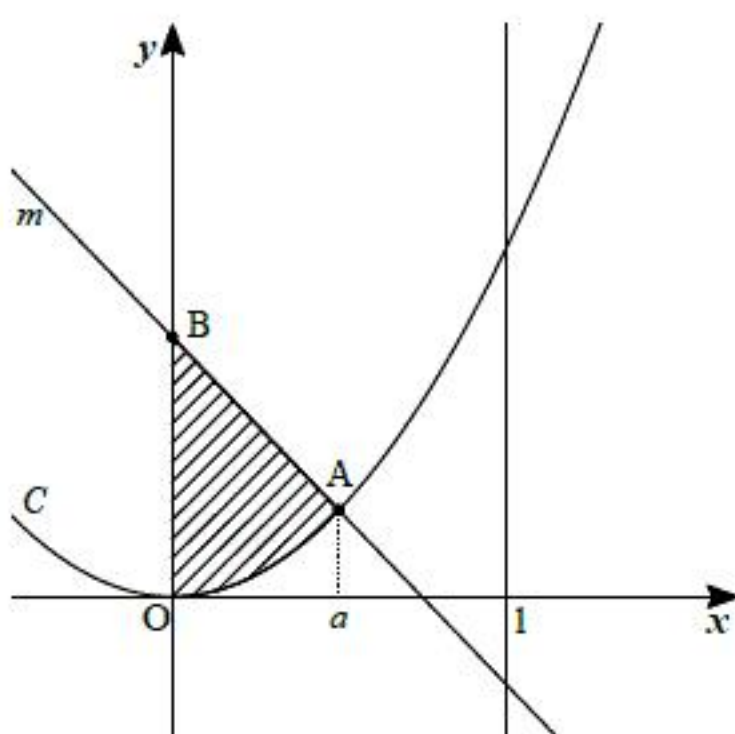
であり、 $S\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

曲線 C と線分 AB 、および y 軸で囲まれた図形は以下の図の斜線部である。



(1)の結果より、直線 ℓ の傾きは $2a$ であるから、直線 m の傾きは $-\frac{1}{2a}$ である。したがって、直線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 \\ &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} T(a) &= \frac{1}{2}a \left(a^2 + \frac{1}{2} + a^2 \right) - \int_0^a x^2 dx \\ &= a^3 + \frac{1}{4}a - \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

となり、 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$S(a) + T(a) = R(a)$ とおくと、(1)、(2)の結果より、

$$\begin{aligned} R(a) &= -\frac{1}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a \\ &= \frac{1}{3}a^3 + a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。この式を a について微分すると、

$$R'(a) = a^2 + 2a - \frac{3}{4}$$

となり、方程式 $a^2 + 2a - \frac{3}{4} = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \pm \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} 2 &< \sqrt{7} < 3 \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{-2 + \sqrt{7}}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つことから、 $0 < a < 1$ における $R(a)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{-2+\sqrt{7}}{2}$	...	1
y'	$\times$	-	0	+	$\times$
y	$\times$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\times$

以上より、 $S(a) + T(a)$ を最小にする a の値は $\frac{-2+\sqrt{7}}{2}$ である。

【解答】

- (1) ㉔
 (2) ㉑
 (3) ㉓

【解説】

(1)

 $f(x)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} \cos^2 x - 2e^{2\sqrt{3}x} \cos x \sin x \\
 &= 2e^{2\sqrt{3}x} \cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x) \\
 &= 4e^{2\sqrt{3}x} \cos x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) \\
 &= 4e^{2\sqrt{3}x} \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

となる。 $e^{2\sqrt{3}x} > 0$ であるから、 $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において $f'(x) = 0$ となる x を計算すると、

$$\begin{aligned}
 4e^{2\sqrt{3}x} \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi
 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y		↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	

以上より、 $f(x)$ が極大値を取るような x の値の個数は 2 個である。

(2)

(1) の結果より、 $f(x)$ が最大値を取るような x の値は $x = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ のいずれかである。

$f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ の値をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi} \\
 f\left(\frac{4}{3}\pi\right) &= e^{\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi} \cos^2 \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{4} e^{\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi}
 \end{aligned}$$

となる。 $e > 1$ および $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi > \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ より、

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi} &> e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi} \\
 \Leftrightarrow f\left(\frac{4}{3}\pi\right) &> f\left(\frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ が最大値を取るような x の値は $\frac{4}{3}\pi$ である。

(3)

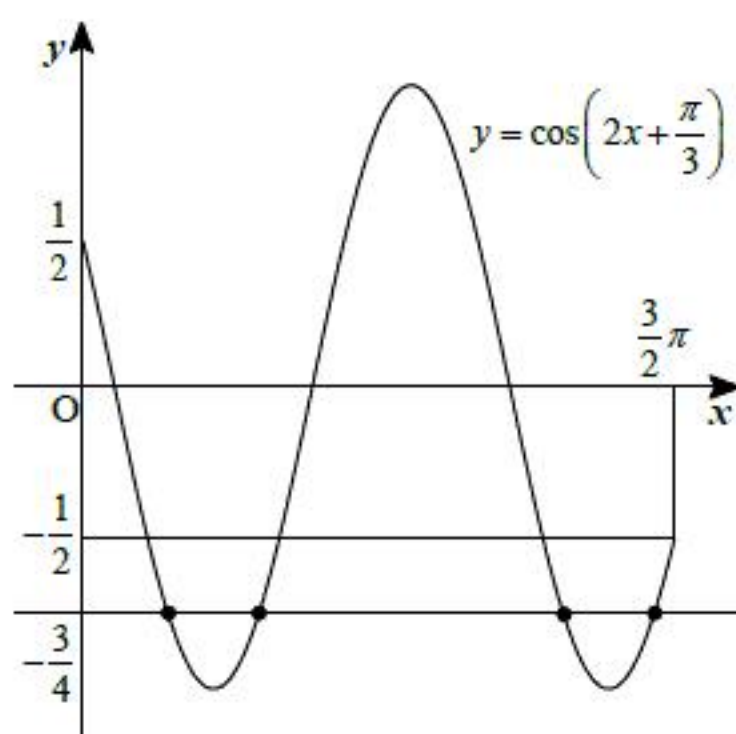
 $f''(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \{f'(x)\}' \\
 &= (2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} \cos^2 x - 2e^{2\sqrt{3}x} \cos x \sin x)' \\
 &= 12e^{2\sqrt{3}x} \cos^2 x - 4\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} \cos x \sin x - 4\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} \cos x \sin x - 2e^{2\sqrt{3}x} (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
 &= 12e^{2\sqrt{3}x} \cos^2 x - 2e^{2\sqrt{3}x} (\cos^2 x - \sin^2 x) - 8\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} \cos x \sin x \\
 &= e^{2\sqrt{3}x} (10\cos^2 x + 2\sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin 2x) \\
 &= e^{2\sqrt{3}x} (8\cos^2 x + 2 - 4\sqrt{3} \sin 2x) \\
 &= e^{2\sqrt{3}x} (4\cos 2x - 4\sqrt{3} \sin 2x + 6) \\
 &= 2e^{2\sqrt{3}x} \left\{ 4\left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x\right) + 3 \right\} \\
 &= 2e^{2\sqrt{3}x} \left\{ 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \right\}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2e^{2\sqrt{3}x} \left\{ 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \right\} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= -3 \quad (\because e^{2\sqrt{3}x} > 0) \\
 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、曲線 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($0 < x < \frac{3}{2}\pi$) のグラフは以下の通りである。



上図より、 $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において①を満たす x の個数は 4 個である。