

1

〔解答〕

(1)	f
(2)	d
(3)	d
(4)	c

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}} - \frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}} \\
 &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-2} - \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\
 &= \sqrt{10}+\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

x^{2017} を x^2+x で割ったときの商を整式 $Q(x)$ とし、余りを実数 a, b を用いて $ax+b$ とする。このとき、

$$x^{2017} = (x^2+x)Q(x) + ax+b$$

と表せる。これに、 $x=-1, 0$ を代入して

$$\begin{cases} -1 = -a+b \\ 0 = b \end{cases}$$

となる。これを解いて、 $a=1, b=0$ となるため、求める余りは x である。

(3)

$0 < x < 1$ で考える。

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 t|t-x| dt \\
 &= \int_0^x t(x-t) dt + \int_x^1 t(t-x) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}xt^2 \right]_x^1 \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

となるから、

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

点 P の座標を $(0, y, z)$ とおくと、

$$\begin{cases} OP^2 = y^2 + z^2 \\ AP^2 = (3-0)^2 + (0-y)^2 + (1-z)^2 = y^2 + z^2 - 2z + 10 \\ BP^2 = (1-0)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2 = y^2 + z^2 - 4y - 2z + 6 \end{cases}$$

3点 O, A, B からの距離が等しいため、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} y^2 + z^2 = y^2 + z^2 - 2z + 10 \\ y^2 + z^2 - 2z + 10 = y^2 + z^2 - 4y - 2z + 6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 10 \\ 4y = -4 \end{cases} \\
 &\therefore \begin{cases} y = -1 \\ z = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

と求まる。ゆえに、 $P(0, -1, 5)$ である。このとき、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PA} &= (3, 1, -4) \\
 \overrightarrow{PB} &= (1, 3, -4)
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{PA}| &= |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{26} \\
 \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) = 22
 \end{aligned}$$

となるため、 $\triangle APB$ の面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 \cdot |\overrightarrow{PB}|^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{26^2 - 22^2} \\
 &= 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

(1)	d
(2)	a
(3)	b

〔解説〕

(1)

 N の桁数を m とすると

$$10^{m-1} \leq 2^{100} < 10^m$$

であるから、各辺の常用対数をとって

$$m-1 \leq 100 \log_{10} 2 < m$$

となる。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ より

$$m-1 \leq 30.10 < m$$

であるため、求める桁数 m は 31 である。

(2)

 N の最高位の数字を k とすると

$$k \cdot 10^{30} \leq 2^{100} < (k+1) \cdot 10^{30}$$

であるから、各辺の常用対数をとって

$$30 + \log_{10} k \leq 30.10 < 30 + \log_{10} (k+1)$$

となる。ゆえに、

$$\log_{10} k \leq 0.10 < \log_{10} (k+1)$$

となる。ここで、 $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ より、求める N の最高位の数字 k は 1 である。

(3)

 N の最高位から 1 つ下の位の数字を ℓ とすると

$$\ell \cdot 10^{29} \leq 2^{100} - 10^{30} < (\ell+1) \cdot 10^{29}$$

$$\Leftrightarrow (\ell+10) \cdot 10^{29} \leq 2^{100} < (\ell+11) \cdot 10^{29}$$

であるから、各辺の常用対数をとって

$$29 + \log_{10} (\ell+10) \leq 30.10 < 29 + \log_{10} (\ell+11)$$

となる。ゆえに、

$$\log_{10} (\ell+10) \leq 1.10 < \log_{10} (\ell+11)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \log_{10} 12 &= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 0.6020 + 0.4771 \\ &= 1.0791 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 13 = 1.1139$$

より、求める N の最高位から 1 つ下の位の数字 ℓ は 2 である。

〔解答〕

(1)	c
(2)	b
(3)	c

〔解説〕

(1)

$6\overrightarrow{PA}+14\overrightarrow{PB}+15\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を点 B を始点にして整理すると、

$$6(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})+14(-\overrightarrow{BP})+15(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 35\overrightarrow{BP}=6\overrightarrow{BA}+15\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{BC}}{7} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。いま、点 D は直線 BP 上かつ辺 AC 上の点であるから、

$$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BP} \quad (k \text{ は実数})$$

$$\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BA}+(1-t)\overrightarrow{BC} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表せる。①より、 $k=\frac{5}{3}$, $t=\frac{2}{7}$ とすればよい。このとき、

$$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{5}{7}\overrightarrow{BC}$$

となるから、D は辺 AC を 5:2 に内分する点である。すなわち、

$$AD:CD=5:2$$

である。

(2)

$k=\frac{5}{3}$ より、

$$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

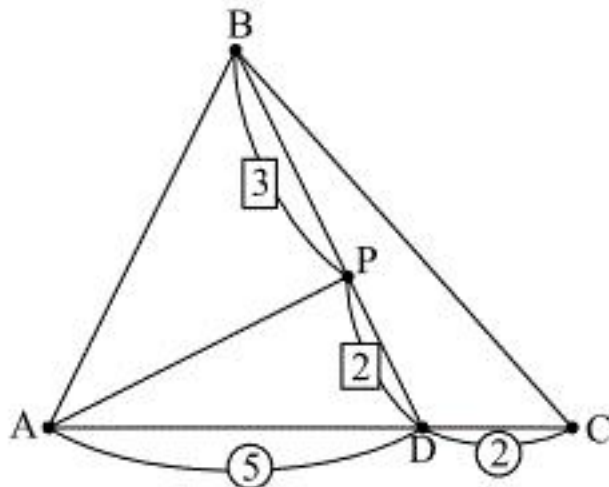
であるから、

$$BP:PD=3:2$$

となる。

(3)

$\triangle ABC$ および点 D, P の図は以下のようになる。



$\triangle ABC$ の面積を S とすると、上図より $\triangle ADP$ の面積は

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} S = \frac{2}{7} S$$

となるから、

$$\triangle ABC : \triangle ADP = 7 : 2$$

と求まる。

〔解答〕

(1)	c
(2)	a
(3)	c

〔解説〕

(1)

第 k 番目の区画には 2^{k-1} 個の奇数があるから、 $n \geq 2$ のとき、第 n 番目の区画の最初の数は全体では左から

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 1 = 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 1 \\ = 2^{n-1}$$

番目の奇数である。ゆえに、その数は

$$2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

である。これは $n=1$ のときも成立する。

(2)

$n \geq 2$ のとき、第 n 番目の区画の最後の数は第 $n+1$ 番目の区画の最初の数の1つ前にあるから、

$$2^{n+1} - 1 - 2 = 2^{n+1} - 3$$

である。ゆえに、第 n 番目の区画に入る数の和は

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ (2^n - 1) + (2^{n+1} - 3) \right\} \cdot 2^{n-1} = (3 \cdot 2^n - 2^2) \cdot 2^{n-2} \\ = 3 \cdot 2^{2n-2} - 2^n$$

となる。これは $n=1$ のときも成立する。

(3)

2017が第 n 番目の区画にあるとき

$$2^n - 1 \leq 2017 < 2^{n+1} - 1$$

と表せる。 $n=10$ のとき、 $2^n - 1 = 1023$ 、 $2^{n+1} - 1 = 2047$ となり上の式を満たすから、

$$n = 10$$

である。また、2017が第10番目の区画の第 m 番目の数であるとき、

$$2017 = 1023 + 2 \cdot (m - 1)$$

と表せるから、

$$m = \frac{2017 - 1023}{2} + 1 \\ = 498$$

と求まる。