

I

【解答】

(1)	f
(2)	d
(3)	d
(4)	c
(5)	d

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}} - \frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-2} - \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \sqrt{10}+\sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。

(2)

x^{2017} を x^2+x で割ったときの商を整式 $Q(x)$ とし、余りを実数 a, b を用いて $ax+b$ とする。このとき、

$$x^{2017} = (x^2+x)Q(x) + ax+b$$

と表せる。これに、 $x=-1, 0$ を代入して

$$\begin{cases} -1 = -a+b \\ 0 = b \end{cases}$$

となる。これを解いて、 $a=1, b=0$ となるから、求める余りは x である。

(3)

$x=\frac{1}{2}$ における $f(x)$ の微分係数を求めたいから、 $0 < x < 1$ における $f(x)$ を考える。

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^1 t|t-x|dt \\ &= \int_0^x t(x-t)dt + \int_x^1 t(t-x)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}xt^2 \right]_x^1 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となるから、

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

と求まる。

(4)

点 P の座標を $(0, y, z)$ とおくと、

$$\begin{cases} OP^2 = y^2 + z^2 \\ AP^2 = (3-0)^2 + (0-y)^2 + (1-z)^2 = y^2 + z^2 - 2z + 10 \\ BP^2 = (1-0)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2 = y^2 + z^2 - 4y - 2z + 6 \end{cases}$$

となる。点 P は 3 点 O, A, B からの距離が等しいので、 $OP=AP, AP=BP$ である。よって、

$$\begin{aligned}\begin{cases} y^2 + z^2 = y^2 + z^2 - 2z + 10 \\ y^2 + z^2 - 2z + 10 = y^2 + z^2 - 4y - 2z + 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 10 \\ 4y = -4 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} y = -1 \\ z = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

と求まる。ゆえに、P $(0, -1, 5)$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= (3, 1, -4) \\ \overline{PB} &= (1, 3, -4)\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}|\overline{PA}| &= |\overline{PB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{26} \\ \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) = 22\end{aligned}$$

となるから、 $\triangle APB$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{|\overline{PA}|^2 \cdot |\overline{PB}|^2 - (\overline{PA} \cdot \overline{PB})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{26^2 - 22^2} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(5)

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 \cos 3x)' \\ &= (x^2)' \cdot \cos 3x + x^2 \cdot (\cos 3x)' \\ &= 2x \cos 3x + x^2 \cdot (-3 \sin 3x) \\ &= 2x \cos 3x - 3x^2 \sin 3x\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	d
(2)	a
(3)	b

〔解説〕

(1)

 $N = 2^{100}$ の桁数を m とすると

$$10^{m-1} \leq 2^{100} < 10^m$$

である。 $\log_{10} x$ は単調増加な関数であるから、上の不等式の各辺の常用対数をとって

$$m-1 \leq 100 \log_{10} 2 < m$$

となる。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ より

$$m-1 \leq 30.10 < m$$

であるから、求める桁数 m は 31 である。

(2)

 N の最高位の数字を k とすると

$$k \cdot 10^{30} \leq 2^{100} < (k+1) \cdot 10^{30}$$

である。 $\log_{10} x$ は単調増加な関数であるから、上の不等式の各辺の常用対数をとって

$$30 + \log_{10} k \leq 30.10 < 30 + \log_{10} (k+1)$$

となる。ゆえに、

$$\log_{10} k \leq 0.10 < \log_{10} (k+1)$$

となる。ここで、 $\log_{10} x$ が単調増加な関数であることと $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ より、求める N の最高位の数字 k は 1 である。

(3)

 N の最高位から 1 つ下の位の数字を ℓ とすると

$$\ell \cdot 10^{29} \leq 2^{100} - 10^{30} < (\ell+1) \cdot 10^{29}$$

$$\Leftrightarrow (\ell+10) \cdot 10^{29} \leq 2^{100} < (\ell+11) \cdot 10^{29}$$

である。 $\log_{10} x$ は単調増加な関数であるから、各辺の常用対数をとって

$$29 + \log_{10} (\ell+10) \leq 30.10 < 29 + \log_{10} (\ell+11)$$

となる。ゆえに、

$$\log_{10} (\ell+10) \leq 1.10 < \log_{10} (\ell+11)$$

となる。ここで、 $\log_{10} x$ は単調増加な関数であることと、

$$\begin{aligned} \log_{10} 12 &= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 0.6020 + 0.4771 \\ &= 1.0791 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 13 = 1.1139$$

より、求める N の最高位から 1 つ下の位の数字 ℓ は 2 である。

【解答】

(1)	c
(2)	b
(3)	c

【解説】

(1)

 $6\overrightarrow{PA}+14\overrightarrow{PB}+15\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を点 B を始点にして整理すると,

$$6(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})+14(-\overrightarrow{BP})+15(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 35\overrightarrow{BP}=6\overrightarrow{BA}+15\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{BC}}{7}=\frac{6}{35}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$$

となる。いま、点 D は直線 BP 上かつ辺 AC 上の点なので、

$$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BP}=\frac{6}{35}k\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}k\overrightarrow{BC} \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BA}+(1-t)\overrightarrow{BC} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで3点 A, B, C は三角形を成すから $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ は1次独立である。よって、①、②

の $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ の係数はそれぞれ等しいから、

$$\begin{cases} \frac{6}{35}k=t \\ \frac{3}{7}k=1-t \end{cases}$$

$$\therefore (k, t) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{7} \right)$$

となる。このとき、

$$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{5}{7}\overrightarrow{BC}$$

となるから、D は辺 AC を 5:2 に内分する点である。すなわち、

$$AD:CD=5:2$$

である。

(2)

$k=\frac{5}{3}$ より、

$$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

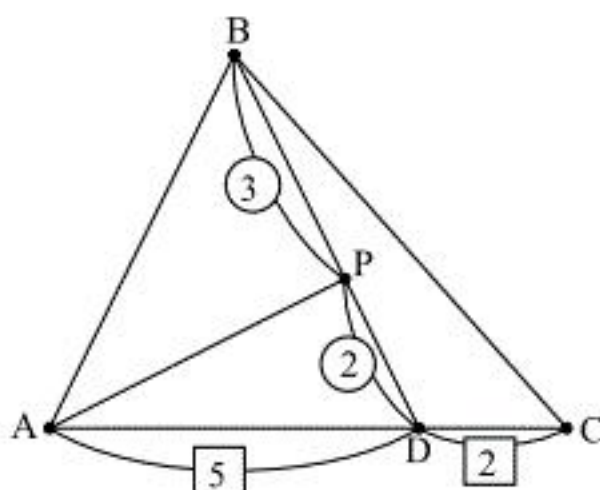
であるから、

$$BP:PD=3:2$$

となる。

(3)

$\triangle ABC$ および点 D, P の図は以下のようになる。



$\triangle ABC$ の面積を S とすると、上図より $\triangle ADP$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AC} \cdot \frac{PD}{BD} S &= \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} S \\ &= \frac{2}{7} S \end{aligned}$$

となるので、

$$\triangle ABC : \triangle ADP = 7 : 2$$

と求まる。

〔解答〕

(1)	c
(2)	a
(3)	e

〔解説〕

(1)

第 k 番目の区画には 2^{k-1} 個の奇数がある。よって、 $n \geq 2$ のとき第 n 番目の区画の最初の数
全体では左から

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 1 = 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 1 \\ = 2^{n-1}$$

番目の奇数である。 $n=1$ とすると $2^0=1$ となるから、これは $n=1$ でも成り立つ。よって、第 n
番目の区画の最初の数全体では左から 2^{n-1} 番目の奇数であり、その数は

$$2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

である。

(2)

第 n 番目の区画の最後数は第 $n+1$ 番目の区画の最初の数1つ前にあるので、

$$2^{n+1} - 1 - 2 = 2^{n+1} - 3$$

である。ゆえに、初項 $2^n - 1$ 、末項 $2^{n+1} - 3$ 、項数 2^{n-1} の等差数列を成すから、その和は

$$\frac{1}{2} \cdot \{(2^n - 1) + (2^{n+1} - 3)\} \cdot 2^{n-1} = (3 \cdot 2^n - 2^2) \cdot 2^{n-2} \\ = 3 \cdot 2^{2n-2} - 2^n$$

となる。

(3)

2017が第 n 番目の区画にあるとき

$$2^n - 1 \leq 2017 < 2^{n+1} - 1$$

が成立する。 $n=10$ のとき、 $2^n - 1 = 1023$ 、 $2^{n+1} - 1 = 2047$ となり上の式を満たすことと、 $2^x - 1$
が単調増加な関数であることから、

$$n = 10$$

である。また、2017が第10番目の区画の第 m 番目の数であるとき、

$$2017 = 1023 + 2 \cdot (m - 1)$$

と表せるので、

$$m = \frac{2017 - 1023}{2} + 1 \\ = 498$$

と求まる。

【解答】

(1)	c
(2)	a
(3)	c

【解説】

(1)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ であり、これと増減表より $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

よって、求める a の値は 1 となる。

(2)

$y=f(x)$ 上の点 $\left(t, \frac{t}{1+t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}(x-t) + \frac{t}{1+t^2} \\ &= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}x + \frac{2t^3}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

となる。この接線が点 $(a, f(a))$ 、すなわち点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ を通るので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cdot 1 + \frac{2t^3}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2t^3 - t^2 + 1}{t^4 + 2t^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} t^4 + 2t^2 + 1 &= 2(2t^3 - t^2 + 1) \\ \Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 3t^2 + t + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 - 2t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2\{t - (1+\sqrt{2})\}\{t - (1-\sqrt{2})\} &= 0 \\ \therefore t &= 1, 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

[1] $t=1$ のとき

接線の傾きは

$$f'(1) = \frac{1-1^2}{(1+1^2)^2} = 0$$

であり、これは $m < 0$ に反する。

[2] $t=1+\sqrt{2}$ のとき

接線の傾きは

$$\begin{aligned} f'(1+\sqrt{2}) &= \frac{1-(1+\sqrt{2})^2}{\{1+(1+\sqrt{2})^2\}^2} \\ &= \frac{-2-2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{-2-2\sqrt{2}}{8(3+2\sqrt{2})} \\ &= \frac{-1-\sqrt{2}}{4(3+2\sqrt{2})} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であり、これは $m < 0$ を満たす。

[3] $t=1-\sqrt{2}$ のとき

接線の傾きは

$$\begin{aligned} f'(1-\sqrt{2}) &= \frac{1-(1-\sqrt{2})^2}{\{1+(1-\sqrt{2})^2\}^2} \\ &= \frac{-2+2\sqrt{2}}{(4-2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{-2+2\sqrt{2}}{8(3-2\sqrt{2})} \\ &= \frac{-1+\sqrt{2}}{4(3-2\sqrt{2})} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{4} \end{aligned}$$

であり、これは $m < 0$ に反する。

以上[1]から[3]より求める m の値は $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$ である。

(3)

直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= k(x-a) + f(a) \\ &= k(x-1) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。いま、直線 l と曲線 $y=f(x)$ の点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 以外の共有点の x 座標が α, β なので、

$k(x-1) + \frac{1}{2} = f(x)$ は $1, \alpha, \beta$ を解に持つ。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^2} &= k(x-1) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= k(x-1)(1+x^2) + \frac{1}{2}(1+x^2) \\ \Leftrightarrow kx^3 + \left(\frac{1}{2} - k\right)x^2 + (k-1)x + \frac{1}{2} - k &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)\left(kx^2 + \frac{1}{2}x + k - \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $\alpha < \beta, k < 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4k\left(k - \frac{1}{2}\right)}}{2k} \\ &= \frac{-\sqrt{1+8k-16k^2} - 1}{4k} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \left(\beta + \frac{1}{2k} \right) &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{-\sqrt{1+8k-16k^2} - 1}{4k} + \frac{1}{2k} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1+8k-16k^2}}{4k} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1+8k-16k^2}}{4k} \cdot \frac{1 + \sqrt{1+8k-16k^2}}{1 + \sqrt{1+8k-16k^2}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{16k^2 - 8k}{4k(1 + \sqrt{1+8k-16k^2})} \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{4k - 2}{1 + \sqrt{1+8k-16k^2}} \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

と求まる。