

【解答】

(1)	㉔
(2)	㉒
(3)	㉑
(4)	㉓

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 5\cos 2\alpha - 2\sin \alpha + 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 5(1 - 2\sin^2 \alpha) - 2\sin \alpha + 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 10\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha - 8 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2(5\sin \alpha - 4)(\sin \alpha + 1) &= 0 \\
 \therefore \sin \alpha &= \frac{4}{5} \quad (\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ より } \sin \alpha > 0)
 \end{aligned}$$

である。 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ の範囲では $\cos \alpha < 0$ であることに注意すると

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - (\sin^2 \alpha)} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

となるから、半角の公式より

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{4}{5}$$

が得られる。 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから、

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

と分かる。

(2)

$$\begin{cases}
 x + y = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = 10 \\
 xy = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 1
 \end{cases}$$

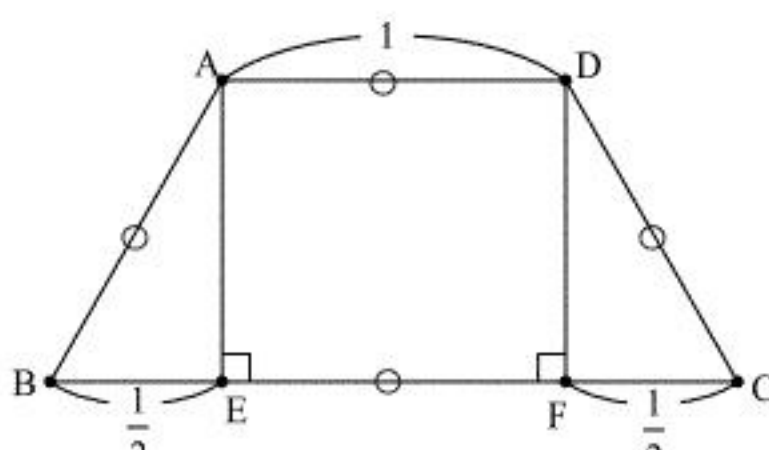
であるから、法を10とした合同式を用いて、

$$\begin{aligned}
 x^6 + y^6 &= (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3 \\
 &= \{(x + y)^3 - 3xy(x + y)\}^2 - 2(xy)^3 \\
 &= (10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10)^2 - 2 \cdot 1^3 \\
 &\equiv -2 \\
 &\equiv 8 \pmod{10}
 \end{aligned}$$

となる。よって $x^6 + y^6$ の1の位の数字は8である。

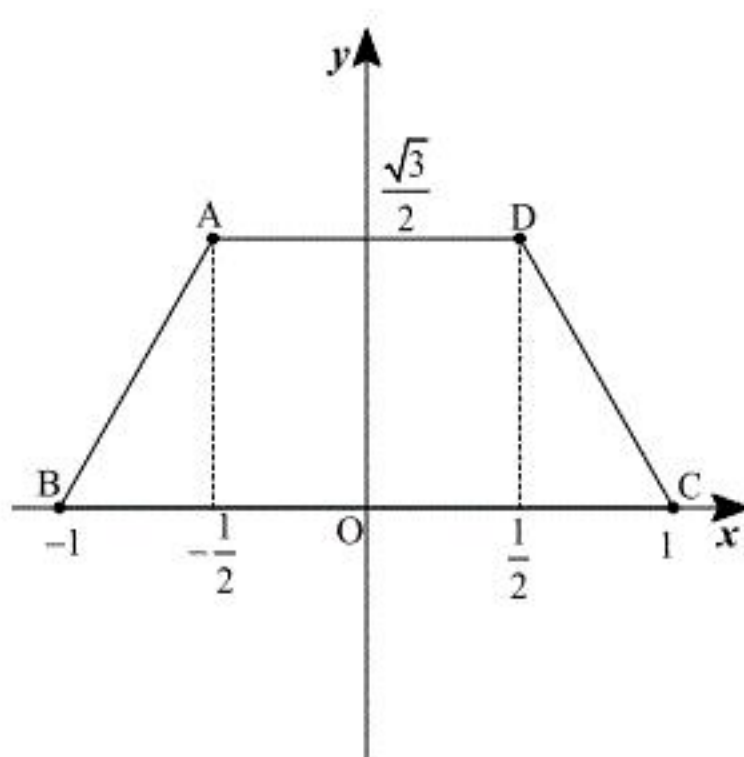
(3)

等脚台形 ABCD を図示すると、次のようになる。ただし、点 A, D から辺 BC に下ろした垂線の足をそれぞれ点 E, F と名付けた。



上図において、 $\triangle ABE$ は斜辺の長さが1、もう1辺の長さが $\frac{1}{2}$ の直角三角形であるから、

$\angle ABE = \frac{\pi}{3}$ と分かり、 $AE = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。よって等脚台形 ABCD に対して、次のように座標を設定することが出来る。



上図より

$$\begin{cases}
 \overrightarrow{AC} = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right), 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 \overrightarrow{DB} = \left(-1 - \frac{1}{2}, 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
 \end{cases}$$

となるから、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

となる。

(4)

袋 A を選ぶ確率は $\frac{2}{3}$ 、袋 B を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ である。また、袋 A、袋 B から3個の球を取り出すとき、球の組合せの総数はそれぞれ ${}_{10}C_3$ 通りあり、同様に確からしい。いま、袋 A を選ぶ事象を α 、袋の中から赤球2個、白球1個を取り出す事象を β と名付けると、求める確率は

$$P_{\beta}(\alpha) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\beta)} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。さて、袋の中から赤球2個、白球1個を取り出す事象について、

- 赤球6個、白球4個が入った袋 A から赤球2個、白球1個を取り出す場合
- 赤球4個、白球6個が入った袋 B から赤球2個、白球1個を取り出す場合

の2つの場合があるから、

$$P(\beta) = \frac{2}{3} \cdot \frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{13}{30} \quad \dots \textcircled{2}$$

と計算できる。また、 $P(\alpha \cap \beta)$ は袋 A から赤球2個、白球1個を取り出す確率であるから、

$$P(\alpha \cap \beta) = \frac{2}{3} \cdot \frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。以上、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ より、求める確率は

$$P_{\beta}(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{10}{13}$$

となる。

〔解答〕

(1)	㉠
(2)	㉡
(3)	㉢

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \int_0^1 |x^2 - x| dx \\
 &= \int_0^1 |x(x-1)| dx \\
 &= \int_0^1 x(1-x) dx \quad (\because 0 \leq x \leq 1 \text{ の範囲では } x(x-1) \leq 0) \\
 &= \int_0^1 (x - x^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^1 |(x-1)(x-t)| dx \\
 &= \int_0^1 (1-x)|x-t| dx \quad (\because 0 \leq x \leq 1 \text{ の範囲では } x-1 \leq 0)
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq t$ の範囲では $x-t \leq 0$ 、 $t \leq x \leq 1$ の範囲では $x-t \geq 0$ となるから

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^t (1-x)(t-x) dx + \int_t^1 (1-x)(x-t) dx \\
 &= \int_0^t \{x^2 - (1+t)x + t\} dx - \int_t^1 \{x^2 - (1+t)x + t\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1+t}{2}x^2 + tx \right]_0^t - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1+t}{2}x^2 + tx \right]_t^1 \\
 &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}(1+t)t^2 + t^2 - \left\{ \frac{1}{3}(1-t^3) - \frac{1}{2}(1+t)(1-t^2) + t(1-t) \right\} \\
 &= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

と計算できる。よって

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -t^2 + 2t - \frac{1}{2} \\
 &= -\left(t - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

となるから、 $f'(t) = 0$ ($0 < t < 1$) となる t の値は

$$t = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

である。

(3)

$0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の増減は、次のようになる。

t	0	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	最小値	$\nearrow$	

よって求める最小値は $f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \\
 &= \left(-t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}t
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{3}(t-1)f'(t) + \frac{1}{3}t$$

が成立するから、 $f'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{2-\sqrt{2}}{6}
 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	㉔
(2)	㉓
(3)	㉒

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} &= \{2a_{n+1} - (n+1)\} - (2a_n - n) \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n + 1
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= S_1 \\
 \Leftrightarrow a_1 &= 2a_1 - 1 \\
 \Leftrightarrow a_1 &= 1
 \end{aligned}$$

である。(1)より

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 2(a_n + 1)
 \end{aligned}$$

が成立するから

$$a_n = 2^{n-1}(a_1 + 1) - 1 = 2^n - 1$$

と分かり、

$$a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{k + \frac{k(k-1)}{2}} - 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{\frac{k(k+1)}{2}} - 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \right\} \\
 &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}} + 2^{\frac{(n-1)n}{2}} - 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} + \cdots + 2^{\frac{1 \cdot 2}{2}} - 2^{\frac{1 \cdot 0}{2}} \\
 &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 1
 \end{aligned}$$

である。よって

$$\sum_{k=1}^{10} a_k b_k = 2^{\frac{10(10+1)}{2}} - 1 = 2^{55} - 1$$

となる。

〔解答〕

(1)	Ⓕ
(2)	Ⓖ
(3)	Ⓒ

〔解説〕

(1)

球面 S の方程式は $(x-a)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 6^2$ である。原点 O が球面 S 上にあることより

$$\begin{aligned}(0-a)^2 + (0-4)^2 + (0-4)^2 &= 6^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 4 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となるから、改めて球面 S の方程式を示すと

$$S: (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 36 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 x 軸と球面 S の交点であり、点 O とは異なる点である点 Q の座標は

$$Q(q, 0, 0) \quad (q \neq 0)$$

とおけるから、 $\textcircled{1}$ に代入することで

$$\begin{aligned}(q-2)^2 + (0-4)^2 + (0-4)^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow (q-2)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow q-2 &= \pm 2 \\ \therefore q &= 4 \quad (\because q \neq 0)\end{aligned}$$

が得られる。よって点 Q の x 座標は 4 である。

(2)

(1) より $P(2, 4, 4)$, $Q(4, 0, 0)$ であるから、

$$\begin{cases} \overrightarrow{PO} = (-2, -4, -4) \\ \overrightarrow{PQ} = (2, -4, -4) \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} &= |\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cdot \cos \angle OPQ \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{-2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4)}{6 \cdot 6} \quad (\because PO, PQ \text{ は球の半径より } |\overrightarrow{PO}| = |\overrightarrow{PQ}| = 6) \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

と求められる。

(3)

3 点 O, P, R が一直線上にあり、点 P が球の中心で点 O, R は球面に存在するので線分 OR は球の直径となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= 2\overrightarrow{OP} \\ &= (4, 8, 8)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} &= 4 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OQR$ の面積は

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 \cdot |\overrightarrow{OR}|^2 - (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(4^2 + 0^2 + 0^2) \cdot (4^2 + 8^2 + 8^2) - 16^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^8 \cdot 9 - 2^8} \\ &= 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。