

〔解答〕

(1)	a
(2)	e
(3)	e
(4)	a
(5)	f
(6)	c

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{6} \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{6}k \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{36} - 2 \cdot \frac{5}{6}k \\ \therefore k &= -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

となる。

(2)

「1個のさいころを n 回投げるとき、少なくとも1回は当たる」事象の余事象は、「 n 回すべてで外れる」事象である。よって、出る目は1から6の6通りで同様に確からしく、1回の操作で外れる確率は $\frac{2}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n &\geq \frac{80}{81} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n &\leq \frac{1}{81} \end{aligned}$$

辺々3を底数とする対数をとると、底が1より大きいことから

$$\begin{aligned} n \log_3 \frac{2}{3} &\leq \log_3 \frac{1}{81} \\ \Leftrightarrow n(\log_3 2 - \log_3 3) &\leq -4 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{4}{\log_3 3 - \frac{\log_2 2}{\log_2 3}} \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{6.34}{0.585} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$10 < \frac{6.34}{0.585} < 11$$

となるから、条件を満たす最小の自然数 n は11である。

(3)

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -(x-2) & (x < 2) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-4}^6 x|x-2|dx &= \int_{-4}^2 -x(x-2)dx + \int_2^6 x(x-2)dx \\ &= \int_{-4}^2 (-x^2 + 2x)dx + \int_2^6 (x^2 - 2x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-4}^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^6 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{112}{3} + 36 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

(4)

三角関数の合成を用いて、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \sin \left\{ \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{4} \right\} \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{5}{12} \pi \right) \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$f'(x) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{5}{12} \pi \right)$$

である。

(5)

$$\begin{aligned} (4-2\sqrt{3}i) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) &= (4-2\sqrt{3}i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2i - 3i + \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

である。

(6)

$$\begin{aligned} \alpha - \sqrt{\alpha} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha - 2 &= \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

であり、いま $\alpha > 0$ より $\sqrt{\alpha} > 0$ であるから $\alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$ となる。ここで先の式の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} (\alpha - 2)^2 &= (\sqrt{\alpha})^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 4) &= 0 \\ \therefore \alpha &= 4 \quad (\because \alpha > 2) \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha (x - \sqrt{x} - 2)dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \right]_0^4 \\ &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	f
(2)	d
(3)	b

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{-x} &= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \\ &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} y &= 4^x + 4^{-x} - 3(2^x + 2^{-x}) - 2 \\ &= (t^2 - 2) - 3t - 2 \\ &= t^2 - 3t - 4 \end{aligned}$$

である。

(2)

 $y=0$ のとき,

$$\begin{aligned} t^2 - 3t - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-4) &= 0 \\ \therefore t &= -1, 4 \end{aligned}$$

である。ここで、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} t &= 2^x + 2^{-x} \\ &\geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

より、 $t=-1$ は不適である。 $t=4$ のとき,

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{-x} &= 4 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \therefore x &= \log_2(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

を得る。

(3)

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 3t - 4 \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

であり、いま $t \geq 2$ であるから、 y の最小値は $t=2$ のとき -6 である。

〔解答〕

(1)	b
(2)	e
(3)	f
(4)	c

〔解説〕

(1)

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}|^2 &= |-\overrightarrow{GC}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{GA}|^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + |\overrightarrow{GB}|^2 &= |\overrightarrow{GC}|^2 \\ \Leftrightarrow 4 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 9 &= 7 \\ \therefore \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} &= -3 \end{aligned}$$

となる。

(2)

 $\overrightarrow{GA}$ と $\overrightarrow{GB}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} &= |\overrightarrow{GA}| |\overrightarrow{GB}| \cos \theta \\ \Leftrightarrow -3 &= 2 \cdot 3 \cdot \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。いま、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\theta = \frac{2}{3}\pi$ である。

(3)

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}|^2 &= |-\overrightarrow{GB}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{GA}|^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + |\overrightarrow{GC}|^2 &= |\overrightarrow{GB}|^2 \\ \Leftrightarrow 4 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + 7 &= 9 \\ \therefore \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} &= -1 \end{aligned}$$

である。また、 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{GC}|^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + |\overrightarrow{GA}|^2 \\ &= 7 + 2 + 4 \\ &= 13 \end{aligned}$$

となり、 $|\overrightarrow{AC}| > 0$ より、 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13}$ である。

(4)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{GB}|^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + |\overrightarrow{GA}|^2 \\ &= 9 + 6 + 4 \\ &= 19 \end{aligned}$$

となり、 $|\overrightarrow{AB}| > 0$ より、 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{19}$ である。また、 $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|^2 &= |-\overrightarrow{GA}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{GB}|^2 + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + |\overrightarrow{GC}|^2 &= |\overrightarrow{GA}|^2 \\ \Leftrightarrow 9 + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + 7 &= 4 \\ \therefore \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} &= -6 \end{aligned}$$

を得る。さらに $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}$ より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{GC}|^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + |\overrightarrow{GB}|^2 \\ &= 7 + 12 + 9 \\ &= 28 \end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow 28 &= 13 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 19 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{19} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \angle BAC &= 2 \\ \therefore \cos \angle BAC &= \frac{2}{\sqrt{247}} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	a
(2)	g
(3)	d

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 3a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6 \cdot 2^n} \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} &= \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{2^n} \right) \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

前問より、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\
 \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} \right)
 \end{aligned}$$

を得る。

(3)

 a_k について

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right\}
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) \\
 &= \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	d
(2)	e
(3)	c

〔解説〕

(1)

$f(x) = e^x$ とおくと, $f'(x) = e^x$ であるから, 直線 l の方程式は

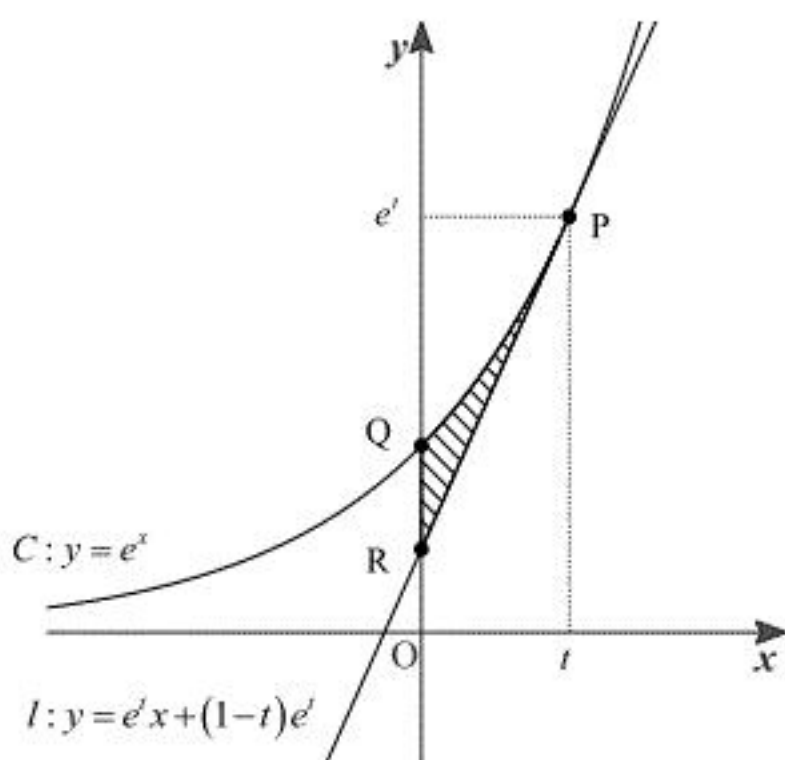
$$y - e' = e'(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = e'x + (1 - t)e'$$

である。よって, 点 R の y 座標は, これに $x = 0$ を代入して $y = e' - te'$ となる。

(2)

曲線 C および直線 l を作図すると以下のようになり, 下図の斜線部分の面積が S である。



$t = 2$ のとき, $l: y = e^2x - e^2$ であるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{e^x - (e^2x - e^2)\} dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2}e^2x^2 + e^2x \right]_0^2 \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t \{e^x - (e'x + e' - e't)\} dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2}e'x^2 - e'x + e'tx \right]_0^t \\ &= e' + \frac{1}{2}e't^2 - e't - 1 \end{aligned}$$

であり, また $\tan \theta = \frac{t}{e' - (1-t)e'} = \frac{1}{e'}$ より,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S \tan \theta}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e'}{t^2} \left(e' + \frac{1}{2}e't^2 - e't - 1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t} - \frac{1}{e't^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。