

[解答]

(5)

[解説]

与えられた条件より、 k を 0 でない実数とすると、

$$\begin{cases} 2x+y=3k & \cdots \textcircled{1} \\ 2y+z=7k & \cdots \textcircled{2} \\ 2z+x=11k & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。 $\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}$ より、

$$\begin{aligned} 3(x+y+z) &= 21k \\ \Leftrightarrow x+y+z &= 7k \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} 2y+z &= x+y+z \\ \Leftrightarrow x &= y \end{aligned}$$

となる。これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} 2x+x &= 3k \\ \Leftrightarrow x &= k \end{aligned}$$

となり、これを $\textcircled{3}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} 2z+k &= 11k \\ \Leftrightarrow 2z &= 10k \\ \Leftrightarrow z &= 5k \end{aligned}$$

と求まる。また、 $x=y$ であるから $y=k$ である。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} &= \frac{k^2+k^2+25k^2}{k^2+5k^2+5k^2} \\ &= \frac{27k^2}{11k^2} \\ &= \frac{27}{11} \quad (\because k \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(2)

[解説]

$$f(x) = |(x+1)(x+3)| + |x+1| + x \text{ とおく。}$$

[1] $x < -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-3) - (x+1) + x \\ &= x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

となる。ここで、不等式 $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ を解くと、

$$x^2 - 2x - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \{x - (1 - \sqrt{5})\} \{x - (1 + \sqrt{5})\} \leq 0$$

$$\therefore 1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5}$$

であり、 $\sqrt{5} > 2$ より $1 - \sqrt{5} < -1$ であるから、条件 $x < -1$ より、

$$1 - \sqrt{5} \leq x < -1$$

となる。

[2] $-1 \leq x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1)(x-3) + (x+1) + x \\ &= -x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

となる。ここで、不等式 $-x^2 + 4x + 4 \leq 0$ を解くと、

$$-x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \{x - (2 + 2\sqrt{2})\} \{x - (2 - 2\sqrt{2})\} \geq 0$$

$$\therefore x \leq 2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2} \leq x$$

であり、 $2 < 2\sqrt{2} < 3$ より $-1 < 2 - 2\sqrt{2} < 3$, $3 < 2 + 2\sqrt{2}$ であるから、条件 $-1 \leq x < 3$ より、

$$-1 \leq x \leq 2 - 2\sqrt{2}$$

となる。

[3] $3 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-3) + (x+1) + x \\ &= x^2 - 2 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $x > 3$ より、

$$x^2 - 2 > 3^2 - 2 = 7 > 0$$

であるから、不等式 $x^2 - 2 \leq 0$ を満たす x は存在しない。以上[1], [2], [3]より、与えられた不等式を満たす x の範囲は、

$$1 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 - 2\sqrt{2}$$

であるから、

$$\alpha = 1 - \sqrt{5}, \beta = 2 - 2\sqrt{2}$$

より、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 - \sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

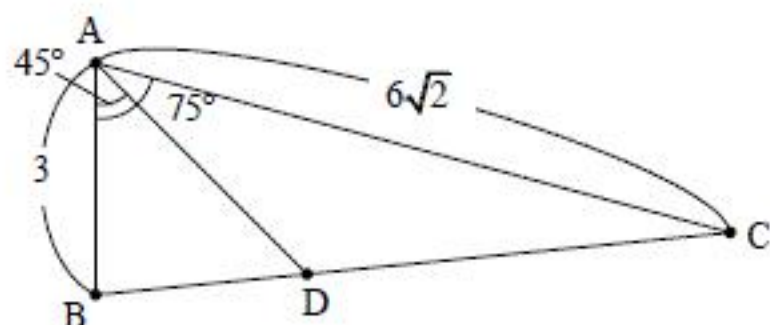
となる。

[解答]

(1)

[解説]

$\triangle ABC$ 及び点 D を図示すると、以下ようになる。



加法定理より、

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。ここで、三角形 ABC の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 75^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)\end{aligned}$$

である。一方、 $AD = x$ とおくと、三角形 ABC の面積は三角形 ABD の面積と三角形 ACD の面積の和に等しいことから、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{4}x\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}\frac{9\sqrt{2}}{4}x &= \frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1) \\ \therefore x &= \sqrt{6} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

[解答]

(1)

[解説]

1回目の勝負について、Aが勝つ確率は、

$$\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

である。

[1] 1回目の勝負でAが勝つとき

このとき、Bの能力が $1+1=2$ と変化するから、2回目の勝負でAが勝つ確率は、

$$\frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

である。したがって、Aが2回連続で勝つ確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

であり、1回目の勝負でAが勝ち、2回目の勝負でBが勝つ確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

である。

[2] 1回目の勝負でBが勝つとき

このとき、Aの能力が $2+1=3$ と変化するから、2回目の勝負でAが勝つ確率は、

$$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

である。したがって、1回目の勝負でBが勝ち、2回目の勝負でAが勝つ確率は、

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

であり、Bが2回連続で勝つ確率は、

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

である。

以上[1], [2]より、Aが勝つ回数の期待値は、

$$2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{4}$$

と求まる。

[解答]

(4)

[解説]

二項定理より,

$$\begin{aligned}
 201^8 &= (2 \cdot 10^2 + 1)^8 \\
 &= \sum_{k=0}^8 ({}_8C_k \cdot 2^k \cdot 10^{2k}) \\
 &= 2^8 \cdot 10^{16} + {}_8C_7 \cdot 2^7 \cdot 10^{14} + {}_8C_6 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} + \sum_{k=0}^5 ({}_8C_k \cdot 2^k \cdot 10^{2k}) \\
 &= 2^8 \cdot 10^{16} + {}_8C_1 \cdot 2^7 \cdot 10^{14} + {}_8C_2 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} + \sum_{k=0}^5 ({}_8C_k \cdot 2^k \cdot 10^{2k})
 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
 201^8 &= 2^8 \cdot 10^{16} + {}_8C_1 \cdot 2^7 \cdot 10^{14} + {}_8C_2 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} + \sum_{k=0}^5 ({}_8C_k \cdot 2^k \cdot 10^{2k}) \\
 &\geq 2^8 \cdot 10^{16} + {}_8C_1 \cdot 2^7 \cdot 10^{14} + {}_8C_2 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} \\
 &= 256 \cdot 10^{16} + 8 \cdot 128 \cdot 10^{14} + 28 \cdot 64 \cdot 10^{12} \\
 &= 256 \cdot 10^{16} + 1024 \cdot 10^{14} + 1792 \cdot 10^{12} \\
 &= (256 + 10.24 + 0.1792) \cdot 10^{16} \\
 &= 266.4192 \cdot 10^{16}
 \end{aligned}$$

である。一方,

$${}_8C_0 = 1, {}_8C_1 = 8, {}_8C_2 = 28, {}_8C_3 = 56, {}_8C_4 = {}_8C_5 = 70$$

より,

$${}_8C_k \leq 70 \quad (k = 0, 1, \dots, 5)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 201^8 &= 2^8 \cdot 10^{16} + {}_8C_1 \cdot 2^7 \cdot 10^{14} + {}_8C_2 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} + \sum_{k=0}^5 ({}_8C_k \cdot 2^k \cdot 10^{2k}) \\
 &\leq 2^8 \cdot 10^{16} + {}_8C_1 \cdot 2^7 \cdot 10^{14} + {}_8C_2 \cdot 2^6 \cdot 10^{12} + \sum_{k=0}^5 (70 \cdot 2^5 \cdot 10^{10}) \\
 &= 266.4192 \cdot 10^{16} + 6 \cdot 70 \cdot 2^5 \cdot 10^{10} \\
 &= 266.4192 \cdot 10^{16} + 1.344 \cdot 10^{14} \\
 &= 266.43264 \cdot 10^{16}
 \end{aligned}$$

である。以上より,

$$266.4192 \cdot 10^{16} \leq 201^8 \leq 266.43264 \cdot 10^{16}$$

となるから, 201^8 の上3桁の数字の並びは266である。

[解答]

(2)

[解説]

与えられた式を計算すると、

$$\begin{aligned}
 i(x+i)^4 &= i(x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot i + 6 \cdot x^2 \cdot i^2 + 4 \cdot x \cdot i^3 + i^4) \\
 &= i(x^4 + 4ix^3 - 6 \cdot x^2 - 4ix + 1) \\
 &= -4x^3 + 4x + (x^4 - 6x^2 + 1)i
 \end{aligned}$$

となるため、 $i(x+i)^4$ が実数となるための条件は、

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ とすると、導関数は

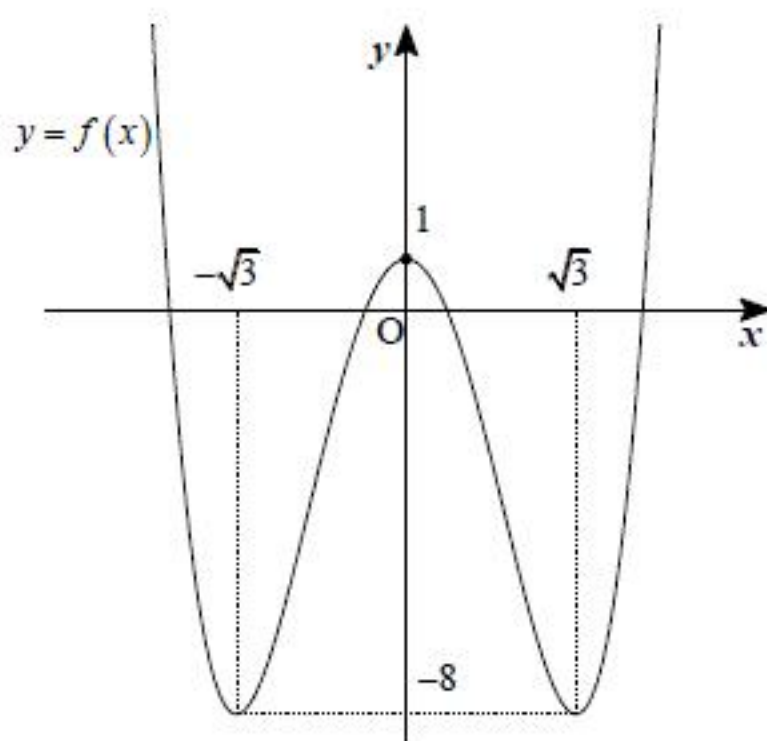
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 12x \\
 &= 4x(x^2 - 3) \\
 &= 4x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

となり、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
f'	-	0	+	0	-	0	+
f	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで、

$$\begin{aligned}
 f(-\sqrt{3}) &= 9 - 18 + 1 = -8 \\
 f(\sqrt{3}) &= 9 - 18 + 1 = -8 \\
 f(0) &= 1
 \end{aligned}$$

より、曲線 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。

曲線 $y = f(x)$ は x 軸と 4 点で交わるため、方程式①は異なる実数解を 4 つもつ。この解を小さい順に p, q, r, s とすると、解と係数の関係より、

$$x^4 - 6x^2 + 1 = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$$

と変形できる。したがって、定数項を比較すると、

$$pqrs = 1$$

となる。

[解答]

(4)

[解説]

点Aが放物線Cの上側にあるとき、

$$\begin{aligned} 5 &> 2k \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - k \\ \Leftrightarrow k &< 11 \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、点Aが放物線Cの下側にあるとき、

$$\begin{aligned} 5 &< 2k \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - k \\ \Leftrightarrow k &> 11 \end{aligned}$$

となる。一方、点Bが放物線Cの上側にあるとき、

$$\begin{aligned} -4 &> 2k \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - k \\ \Leftrightarrow k &< -\frac{16}{7} \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、点Bが放物線Cの下側にあるとき、

$$\begin{aligned} -4 &< 2k \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - k \\ \Leftrightarrow k &> -\frac{16}{7} \end{aligned}$$

となる。したがって、2点のうち一方がCの上側に、他方がCの下側にあるための条件は、

$$k < 11 \text{ かつ } k > -\frac{16}{7}, \text{ または, } k > 11 \text{ かつ } k < -\frac{16}{7}$$

すなわち、

$$-\frac{16}{7} < k < 11 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $-3 < -\frac{16}{7} < -2$ であるから、条件 $k \neq 0$ に注意すると、 $\textcircled{1}$ を満たす整数 k は

$$k = -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

の12個である。

[解答]

(1)

[解説]

与えられた方程式の判別式を D とする。この方程式は異なる2つの実数解をもつため、

$$\begin{aligned}
 D &> 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{D}{4} &> 0 \\
 \Leftrightarrow a^2 - (-2a^2 + 4a + 4) &> 0 \\
 \Leftrightarrow 3a^2 - 4a - 4 &> 0 \\
 \Leftrightarrow (3a+2)(a-2) &> 0 \\
 \Leftrightarrow a < -\frac{2}{3}, a > 2
 \end{aligned}$$

が成り立つ。また、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a \\ \alpha\beta = -2a^2 + 4a + 4 \end{cases}$$

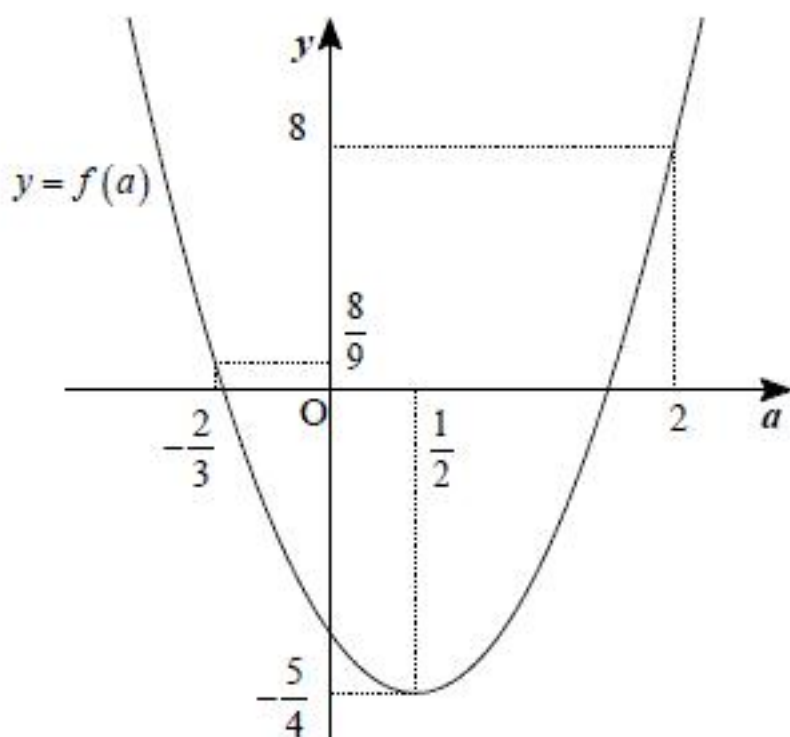
となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\
 &= (2a)^2 - 2(-2a^2 + 4a + 4) \\
 &= 4a^2 + 4a^2 - 8a - 8 \\
 &= 8a^2 - 8a - 8 \\
 &= 8(a^2 - a - 1) \\
 &= 8\left\{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right\}
 \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 $f(a) = 8(a^2 - a - 1)$ とすると、

$$\begin{aligned}
 f\left(-\frac{2}{3}\right) &= 8\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 1\right) \\
 &= \frac{8}{9} \\
 f(2) &= 8(4 - 2 - 1) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

であるから、 $y = f(a)$ のグラフは以下のようなになる。



$\alpha^2 + \beta^2$ がとり得る最小の整数は、 $a < -\frac{2}{3}, a > 2$ において $f(a)$ が取りうる最小の整数である。

前図より、

$$f(a) > \frac{8}{9}$$

であるから、求める最小の整数は1である。

〔解答〕

(3)

〔解説〕

円の中心を O とする。台形 $ABCD$ は円に内接しているため、

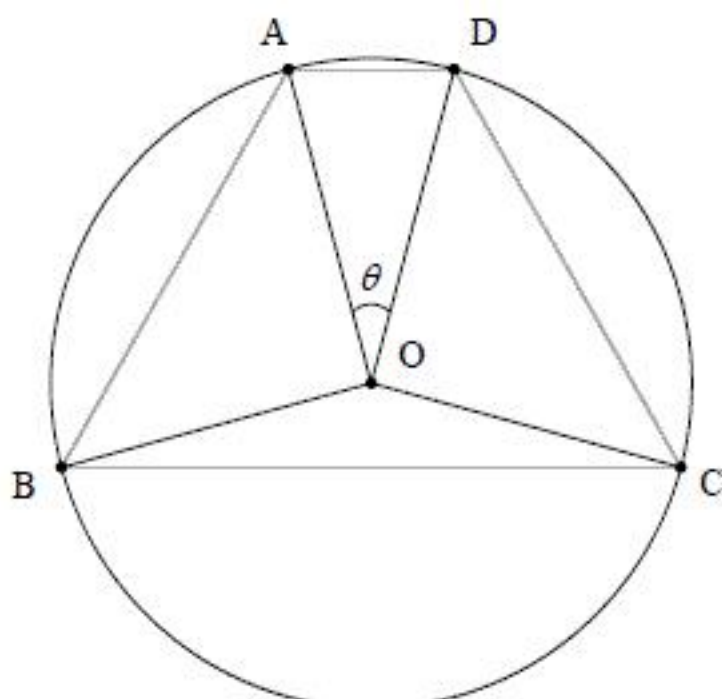
$$OA = OB = OC = OD = 1$$

$$\angle B = \angle C = 60^\circ$$

が成り立つ。

[1] 点 O が台形 $ABCD$ の辺上または内部にあるとき

各点の位置関係は以下の図のようになる。



$\angle AOD = \theta$ とおく。円周角の定理より、

$$\angle AOC = 2 \cdot \angle B = 120^\circ$$

$$\angle BOD = 2 \cdot \angle C = 120^\circ$$

であるから、

$$\angle AOB = \angle COD = 120^\circ - \theta$$

となり、

$$\angle BOC = 360^\circ - \angle AOB - \angle COD - \angle AOD = 120^\circ + \theta$$

となる。これらの角は、いずれも三角形の内角であるから、

$$\begin{cases} 0 < \theta < 180^\circ \\ 0 < 120^\circ - \theta < 180^\circ \\ 0 < 120^\circ + \theta < 180^\circ \end{cases}$$

$$\therefore 0^\circ < \theta < 60^\circ$$

を満たす。このとき、台形の面積を S とおくと、図より S は三角形 AOB 、 BOC 、 COD 、 DOA の面積の和に等しい。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(120^\circ - \theta) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(120^\circ + \theta) \\ &= \frac{1}{2} \{ \sin \theta + 2 \sin(120^\circ - \theta) + \sin(120^\circ + \theta) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sin \theta + 2 \sin 120^\circ \cos \theta - 2 \cos 120^\circ \sin \theta + \sin 120^\circ \cos \theta + \cos 120^\circ \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} (\sin \theta + 3 \sin 120^\circ \cos \theta - \cos 120^\circ \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \theta + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \theta \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \\ &= \frac{3}{2} \sin(\theta + 60^\circ) \end{aligned}$$

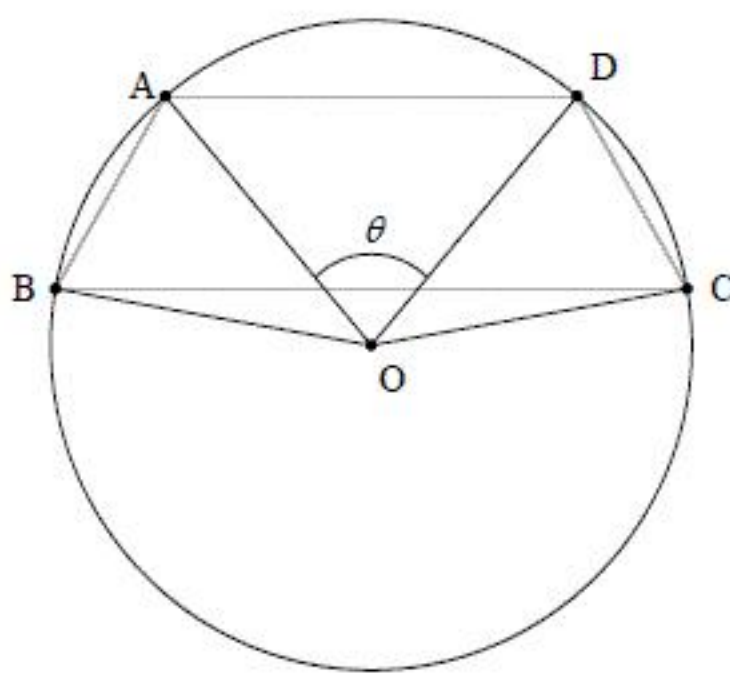
となるから、 S は $\theta = 30^\circ$ のときに最大値

$$\frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

をとる。

[2] 点 O が台形 $ABCD$ の外部にあるとき、

各点の位置関係は以下の図のようになる



[1]と同様に、 $\angle AOD = \theta$ とおく。このとき、円周角の定理より、

$$\angle AOC = 2 \cdot \angle B = 120^\circ$$

$$\angle BOD = 2 \cdot \angle C = 120^\circ$$

であるから、

$$\angle AOB = \angle COD = 120^\circ - \theta$$

となり、

$$\angle BOC = \angle AOB + \angle COD + \angle DOA = 240^\circ - \theta$$

となる。これらの角は、いずれも三角形の内角であるから、

$$\begin{cases} 0 < \theta < 180^\circ \\ 0 < 120^\circ - \theta < 180^\circ \\ 0 < 240^\circ - \theta < 180^\circ \end{cases}$$

$$\therefore 60^\circ < \theta < 120^\circ$$

を満たす。このとき、台形の面積を S とおくと、図より S は三角形 AOB 、 COD 、 DOA の面積の和から三角形 BOC の面積を減じた値に等しい。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(120^\circ - \theta) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(240^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \{ \sin \theta + 2 \sin(120^\circ - \theta) - \sin(240^\circ - \theta) \} \end{aligned}$$

となるが、

$$-\sin(240^\circ - \theta) = \sin\{360^\circ - (240^\circ - \theta)\} = \sin(120^\circ + \theta)$$

であるから、[1]の結果より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \{ \sin \theta + 2 \sin(120^\circ - \theta) + \sin(120^\circ + \theta) \} \\ &= \frac{3}{2} \sin(\theta + 60^\circ) \end{aligned}$$

となる。よって、 S は $\theta = 60^\circ$ のときに最大値

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる。

以上[1]、[2]より、求める台形の面積の最大値は $\frac{3}{2}$ である。

[解答]

(1)

[解説]

与えられた関数 $f(x)$ の導関数を計算すると,

$$f'(x) = 2x$$

となるため,

$$\begin{aligned} g(x) &= 2a(x-a) + 2a^2 \\ &= 2ax \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} (x^2 + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + a^2x \right]_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(a + \frac{1}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{1}{2} \right)^3 \right\} + a^2 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8} \right) - \left(a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8} \right) \right\} + a^2 \\ &= 2a^2 + \frac{1}{12} \\ I_2 &= \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} g(x) dx \\ &= \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} 2ax dx \\ &= \left[ax^2 \right]_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \\ &= a \left\{ \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \\ &= a \left\{ \left(a^2 + a + \frac{1}{4} \right) - \left(a^2 - a + \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_2} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2a^2 + \frac{1}{12}}{2a^2} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 6a^2 + \frac{1}{4} &= 8a^2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{8} \\ \therefore a &= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。

[解答]

(3)

[解説]

与えられた条件より,

$$a_n = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。 $a_n < 1$ を満たす最小の n を求める。

$$a_n < 1$$

$$\Leftrightarrow 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} > 1000 \quad (\because 2^{n-1} > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形でき、 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす最小の n は11である。これより,

$$a_{10} > 1, a_{11} < 1$$

となり、数列 $\{a_n\}$ が単調に減少することから,

$$\dots < P(8) < P(9) < P(10) > P(11) > P(12) > \dots$$

となるため、 $P(n)$ が最大となるのは $n=10$ のときであり、2番目に大きくなるのは $n=9$ または $n=11$ のいずれか一方である。ここで、 $P(9)$ と $P(11)$ を比較すると,

$$\begin{aligned} P(11) &= P(9) \cdot a_{10} \cdot a_{11} \\ &= P(9) \cdot 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= P(9) \cdot \frac{1000}{512} \cdot \frac{1000}{1024} \\ &= P(9) \cdot \frac{1000000}{524288} \end{aligned}$$

となり、 $\frac{1000000}{524288} > 1$ であるから

$$P(11) > P(9)$$

が成り立つため、 $P(n)$ が2番目に大きくなる n は11である。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{n_0} a_k}{\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k} &= \frac{\sum_{k=1}^{11} a_k}{\sum_{k=1}^{10} a_k} \\ &= \frac{2000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right)}{2000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)} \\ &= \frac{2047}{2048} \cdot \frac{1024}{1023} \\ &= \frac{2047}{2046} \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(4)

[解説]

$\log(x+e)=t$ とおく。このとき、 $x=e^t-e$ であり、 $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 1$ である。与えられた式にこれらを代入すると、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \log(x+e) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{e^t - e} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t-1}{e^t - e} \cdot \frac{\log t}{t-1} \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{e^t - e} \right) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t-1} \right)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $f(t)=e^t$ とおくと、

$$f'(t) = e^t$$

であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{e^t - e} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{e^t - e^1} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

となる。一方、 $g(t)=\log t$ とおくと、

$$g'(t) = \frac{1}{t}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t-1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t - \log 1}{t-1} \\ &= g'(1) \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \log(x+e) = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

と求まる。

[解答]

(3)

[解説]

与えられた方程式の左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{an+4k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{a+4 \cdot \frac{k}{n}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{a+4x} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} \log(a+4x) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} \{ \log(a+4) - \log a \} \\
 &= \frac{1}{4} \log \frac{4+a}{a}
 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \log \frac{4+a}{a} &= \frac{1}{4} \log \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{4+a}{a} &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow 8+2a &= 3a \\
 \therefore a &= 8
 \end{aligned}$$

と求まる。

[解答]

(1)

[解説]

直線 l_1 の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{1}(x-1)+2 \\ &= -3x+5 \end{aligned}$$

となり, 直線 l_2 の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{5}(x-5)+4 \\ &= -\frac{3}{5}x+7 \end{aligned}$$

となる。実数 p を用いると, 直線 l_1 上の任意の点は

$$(p, -3p+5)$$

と表される。この点の移動先の座標 (X, Y) は,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ -3p+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2p+3p-5 \\ 3p-3kp+5k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5p-5 \\ (3-3k)p+5k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まり, この点が直線 l_2 上に存在することから,

$$(3-3k)p+5k = -\frac{3}{5}(5p-5)+7$$

$$\Leftrightarrow (6-3k)p+5k-10=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで, ①は任意の実数 p において成り立つため,

$$6-3k=0$$

$$\Leftrightarrow k=2$$

となる必要がある。一方, $k=2$ であれば, ①を満たす。以上より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立ち

$$\alpha+\beta=15$$

と求まる。

[解答]

(3)

[解説]

極方程式 $\theta = \frac{\pi}{3}$ は、直交座標においては傾き $\tan \frac{\pi}{3}$ の直線の方程式を表す。したがって、

$$\begin{aligned} y &= \tan \frac{\pi}{3} \cdot x \\ &= \sqrt{3}x \end{aligned}$$

と変形できる。この直線と2次曲線 $y = \sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}x + k$ が接するとき、 y を消去して得られる2次方程式

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}x + k &= \sqrt{3}x \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x + k &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

は重解をもつ。したがって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}k &= 0 \\ \Leftrightarrow 12 - \sqrt{3}k &= 0 \\ \therefore k &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。