

1

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left[\frac{1}{3}x + 1 \right] = [2x - 1] \text{ を満たすとき, この値を } n (n \text{ は整数}) \text{ とおくと} \\ & \left[\frac{1}{3}x + 1 \right] = n \\ & \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{3}x + 1 < n + 1 \\ & \Leftrightarrow 3n - 3 \leq x < 3n \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{であり, また} \quad & [2x - 1] = n \\ & \Leftrightarrow n \leq 2x - 1 < n + 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \leq x < \frac{n+2}{2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{である. } \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ を同時に満たすような実数 } x \text{ が存在しうる整数 } n \text{ の値は} \\ & \frac{n+1}{2} < 3n \text{ かつ } 3n - 3 < \frac{n+2}{2} \\ & \Leftrightarrow 1 < 5n \text{ かつ } 5n < 8 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{5} < n < \frac{8}{5} \\ & \Leftrightarrow n = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となる. よって, このときの } x \text{ の値の範囲は } \textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ より} \\ & 0 \leq x < 3 \text{ かつ } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ & \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{である.} \quad \quad \quad \text{(答) } 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{3}{4}\overline{BC} = \overline{BN} \text{ のとき} \\ & \frac{3}{4}\overline{BC} = \overline{BN} \\ & \Leftrightarrow \frac{3}{4}(\overline{MC} - \overline{MB}) = \overline{MN} - \overline{MB} \\ & \Leftrightarrow \overline{MB} + 3\overline{MC} - 4\overline{MN} = \vec{0} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となる. } \overline{MA} + \overline{MB} + k\overline{MC} = \vec{0} \text{ を満たすとき, } \textcircled{3} \text{ より} \\ & (-\overline{MA} - k\overline{MC}) + 3\overline{MC} - 4\overline{MN} = \vec{0} \\ & \Leftrightarrow \overline{MA} + (k-3)\overline{MC} + 4\overline{MN} = \vec{0} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{であり, 点 } N \text{ は直線 } AM \text{ 上に存在するから, 実数 } t \text{ を用いて} \\ & \overline{MN} = t\overline{MA} \\ \text{と表され, } \textcircled{4} \text{ より} \\ & (4t+1)\overline{MA} + (k-3)\overline{MC} = \vec{0} \\ \text{となる. } A, C, M \text{ は一直線上に存在しないから, } \overline{MA}, \overline{MC} \text{ は互いに一次独立なベクトルであ} \\ \text{り} \\ & \begin{cases} 4t+1=0 \\ k-3=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (k, t) = \left(3, -\frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{となる.} \quad \quad \quad \text{(答) } k = 3$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (i) \quad & \text{等比数列 } \{a_n\} \text{ の初項を } a (> 0), \text{ 公比を } r \text{ とおくと} \\ & a_n = ar^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{と表される. 漸化式} \\ & a_{n+1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} = 3a_1a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \text{より, } n=1 \text{ のとき} \\ & a_2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 3a_1a_1 \\ & \Leftrightarrow ar + \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 3a^2 \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となり, } n=2 \text{ のとき} \\ & a_3 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 = 3a_1a_2 \\ & \Leftrightarrow ar^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 = 3a^2r \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となる. } \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より} \\ & \left(\frac{1}{2} \right)^3 r - \left(\frac{1}{2} \right)^5 = 0 \\ & \Leftrightarrow r = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となり, これと } \textcircled{5} \text{ より} \\ & a \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 3a^2 \\ & \Leftrightarrow 24a^2 - 2a - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (6a+1)(4a-1) = 0 \\ & \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{である. 逆に, } a = \frac{1}{4}, r = \frac{1}{4} \text{ のとき, } a_n = \frac{1}{4^n} \text{ であるが} \\ & a_{n+1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \\ & \quad = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ & \quad = 3a_1a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となり, 漸化式は成立する.} \\ \text{(答) 初項: } \frac{1}{4} \\ \text{公比: } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad & 0 < \frac{1}{4} < 1 \text{ であるから, } a_n = \frac{1}{4^n} \text{ のとき無限級数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は収束し} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \\ & \quad = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ & \quad = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{となる.} \\ \text{(答) 収束する, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(1)

n_k ($k=0, 1, 2, 3$)は0以上の整数であり、 $n=10$ のとき

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = 10$$

となる。これを満たす (n_0, n_1, n_2, n_3) の組は、10個の玉と3個の仕切りを並び換えて仕切りで分けられる4つの領域に含まれる玉の個数の組と一致するから、求める組の数は

$${}_{13}C_3 = 286 \text{通り}$$

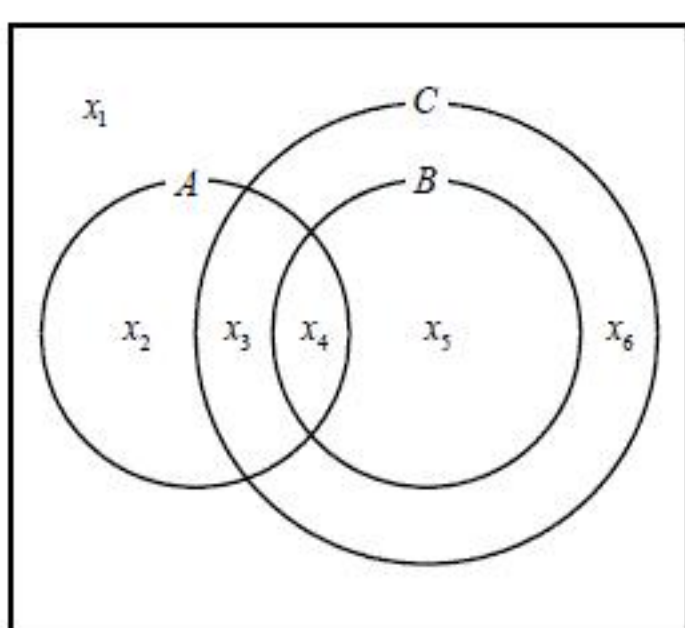
ある。

(答) 286通り

(2)

検査A, B, Cで陽性となった者の集合をそれぞれA, B, Cとおく。条件3より $B \subset C$ である。

下図のように各集合に含まれる人数を x_l ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$)とおく。



このとき

$$n_0 = x_1, n_1 = x_2 + x_6, n_2 = x_3 + x_5, n_3 = x_4$$

である。 $n=15$ のとき

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。条件1より

$$x_2 + x_3 + x_4 = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、条件2より

$$x_5 = 6 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。よって、①, ②, ③より

$$x_1 + x_6 = 4 \quad \dots \textcircled{4}$$

となり

$$\begin{aligned} n_1 &= x_2 + x_6 \\ &= 4 - x_1 + x_2 \end{aligned}$$

である。 $x_l \geq 0$ ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$)であるから、②, ④より

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 5$$

となる。このとき、 x_1, x_2 は①を満たし、 $n_0, n_1 \geq 0$ となる。さらに、組 (x_1, x_2) と組 (n_0, n_1) は一対一対応するから、求める組 (n_0, n_1) の数は、組 (x_1, x_2) の数に一致し

$$5 \times 6 = 30 \text{通り}$$

ある。

(答) 30通り

(3)

条件5より $B \subset C$ であるから、(2)と同様に各集合の人数 x_l ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$)を定義する。このとき

$$n_0 = x_1, n_1 = x_2 + x_6, n_2 = x_3 + x_5, n_3 = x_4$$

である。 $n=2m$ のとき

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2m$$

となる。条件4より

$$x_1 + x_5 + x_6 = m \quad \dots \textcircled{5}$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = m \quad \dots \textcircled{6}$$

である。 $x_l \geq 0$ ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$)であるから、 $x_1 = t, x_4 = s$ とおくと

$$n_0 = t, n_3 = s$$

であり、⑤, ⑥より

$$0 \leq t \leq m, 0 \leq s \leq m \quad \dots \textcircled{7}$$

となり、このとき

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 2m - n_0 - n_3 \\ &= 2m - x_1 - x_4 \\ &= 2m - t - s \end{aligned}$$

である。このとき $n_1, n_2 \geq 0$ であるから

$$0 \leq n_1 \leq 2m - t - s \quad \dots \textcircled{8}$$

となる。⑧を満たす $2m - t - s + 1$ 通りある n_1 のそれぞれの値に対して n_2 の値は1通りに決まる。

以上より、ある組 (n_0, n_3) に対して組 (n_0, n_1, n_3) は $2m - t - s + 1$ 通り存在するから、求める組

(n_0, n_1, n_3) の数は全部で

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^m \left\{ \sum_{s=0}^m (2m - t - s + 1) \right\} &= \sum_{t=0}^m \left[\frac{m+1}{2} \{ (2m - t + 1) + (m - t + 1) \} \right] \\ &= (m+1) \sum_{t=0}^m \left(\frac{3}{2}m - t + 1 \right) \\ &= (m+1) \cdot \frac{m+1}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2}m + 1 \right) + \left(\frac{1}{2}m + 1 \right) \right\} \\ &= (m+1)^3 \end{aligned}$$

通りある。

(答) $(m+1)^3$ 通り

(1)

点 X, Y, Z はそれぞれ辺 CG, CD, AD を $1-p:p$ ($0 < p < 1$) に分ける点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CX} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (1-p)\overrightarrow{AE} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + (1-p)\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AY} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DY} \\ &= \overrightarrow{AD} + p\overrightarrow{AB} \\ &= p\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AZ} &= (1-p)\overrightarrow{AD} \\ &= (1-p)\vec{b}\end{aligned}$$

となる。ここで平面 L 上の任意の点 P について実数 t, s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AX} + s\overrightarrow{AY} + (1-t-s)\overrightarrow{AZ} \\ &= t\{\vec{a} + \vec{b} + (1-p)\vec{c}\} + s\{p\vec{a} + \vec{b}\} + (1-t-s)(1-p)\vec{b} \\ &= (t+ps)\vec{a} + (1-p+pt+ps)\vec{b} + (1-p)t\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。点 U は直線 AE 上の点であるから実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= \alpha\overrightarrow{AE} \\ &= \alpha\vec{c}\end{aligned}$$

と表され、点 U が平面 L 上の点であることと $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに一次独立なベクトルであることから

$$\begin{aligned}&\begin{cases} t+ps=0 \\ 1-p+pt+ps=0 \\ (1-p)t=\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t+ps=0 \\ (1-p)(t-1)=0 \\ (1-p)t=\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (t, s, \alpha) = \left(1, -\frac{1}{p}, 1-p\right) (\because 0 < p < 1)\end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{AU} = (1-p)\vec{c}$ と表される。次に、点 V は直線 EF 上の点であるから実数 β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AV} &= \overrightarrow{AE} + \beta\overrightarrow{EF} \\ &= \beta\vec{a} + \vec{c}\end{aligned}$$

と表され、点 V が平面 L 上の点であることと $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに一次独立なベクトルであることから

$$\begin{aligned}&\begin{cases} t+ps=\beta \\ 1-p+pt+ps=0 \\ (1-p)t=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t+ps=\beta \\ 1-p-(1-p)t=-\beta \\ (1-p)t=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (t, s, \beta) = \left(\frac{1}{1-p}, -\frac{p^2-p+1}{p(1-p)}, p\right) (\because 0 < p < 1)\end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{AV} = p\vec{a} + \vec{c}$ と表される。さらに、点 W は直線 FG 上の点であるから実数 γ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AW} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \gamma\overrightarrow{FG} \\ &= \vec{a} + \gamma\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

と表され、点 W が平面 L 上の点であることと $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに一次独立なベクトルであることから

$$\begin{aligned}&\begin{cases} t+ps=1 \\ 1-p+pt+ps=\gamma \\ (1-p)t=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t+ps=1 \\ 1-p-1=\gamma-1 \\ (1-p)t=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (t, s, \gamma) = \left(\frac{1}{1-p}, -\frac{1}{1-p}, 1-p\right) (\because 0 < p < 1)\end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{AW} = \vec{a} + (1-p)\vec{b} + \vec{c}$ と表される。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AU} = (1-p)\vec{c}, \overrightarrow{AV} = p\vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{AW} = \vec{a} + (1-p)\vec{b} + \vec{c}$$

さらに $0 < p < 1$ のとき

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AE} + p\overrightarrow{EF}$$

より V は辺 EF 上にあり、また $0 < 1-p < 1$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= (1-p)\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AW} &= \overrightarrow{AF} + (1-p)\overrightarrow{FG}\end{aligned}$$

より U, W はそれぞれ辺 AE, FG 上にあることが示された。

(証明終)

(2)

2 直線 XW, UV の交点を S, 2 直線 XY, UZ の交点を T とおく。ここで

$$GW:WF=EV:VF=p:1-p, GX=EU$$

であることから、点 S は直線 BF 上にも存在する。さらに

$$XW:WS=UV:VS=p:1-p \quad \cdots \textcircled{1}$$

より

$$GX:FS=EU:FS=p:1-p$$

となるから

$$\begin{aligned}BS &= BF + FS \\ &= BF + \frac{1-p}{p}EU \\ &= AE + \frac{1-p}{p} \cdot pAE \\ &= (2-p)AE\end{aligned}$$

となり

$$\overrightarrow{AS} = \vec{a} + (2-p)\vec{c}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SU} &= \overrightarrow{AU} - \overrightarrow{AS} \\ &= (1-p)\vec{c} - \{\vec{a} + (2-p)\vec{c}\} \\ &= -\vec{a} - \vec{c} \\ \overrightarrow{SX} &= \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AS} \\ &= \{\vec{a} + \vec{b} + (1-p)\vec{c}\} - \{\vec{a} + (2-p)\vec{c}\} \\ &= \vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

であるから、四角形 UVWX の面積を S_1 , $\triangle SUX$ の面積を T_1 とおくと

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{SU}|^2 |\overrightarrow{SX}|^2 - (\overrightarrow{SU} \cdot \overrightarrow{SX})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2)(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - (|\vec{c}|^2)^2} (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(3^2 + 1^2)(4^2 + 1^2) - (1^2)^2} \\ &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}S_1 &= \left(1 - \frac{SV}{SU} \times \frac{SW}{SX}\right) T_1 \\ &= \{1 - (1-p)(1-p)\} T_1 \\ &= \frac{13}{2}(-p^2 + 2p)\end{aligned}$$

である。同様にして

$$XY:YT=UZ:ZT=1-p:p \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり

$$\overrightarrow{AT} = \vec{b} - p\vec{c}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TX} &= \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AT} \\ &= \{\vec{a} + \vec{b} + (1-p)\vec{c}\} - (\vec{b} - p\vec{c}) \\ &= \vec{a} + \vec{c} \\ &= -\overrightarrow{SU} \\ \overrightarrow{TU} &= \overrightarrow{AU} - \overrightarrow{AT} \\ &= (1-p)\vec{c} - (\vec{b} - p\vec{c}) \\ &= -\vec{b} + \vec{c} \\ &= -\overrightarrow{SX}\end{aligned}$$

であるから、四角形 UZYX の面積を S_2 , $\triangle TUX$ の面積を T_2 とおくと

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{TX}|^2 |\overrightarrow{TU}|^2 - (\overrightarrow{TX} \cdot \overrightarrow{TU})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|-\overrightarrow{SU}|^2 |-\overrightarrow{SX}|^2 - \{(-\overrightarrow{SU}) \cdot (-\overrightarrow{SX})\}^2} \\ &= T_1 \\ &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}S_2 &= \left(1 - \frac{TZ}{TU} \times \frac{TY}{TX}\right) T_2 \\ &= (1-p \cdot p) T_2 \\ &= \frac{13}{2}(-p^2 + 1)\end{aligned}$$

である。以上より、求める六角形 UVWXYZ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{13}{2}(-p^2 + 2p) + \frac{13}{2}(-p^2 + 1) \\ &= \frac{13}{2}(-2p^2 + 2p + 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{2}(1+2p-2p^2)$$

4

(1)

(i)

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ である実数 α, β を用いて $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2}, \beta = \tan^{-1} \frac{1}{3}$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

となる。さらに $\tan \alpha > 0, \tan \beta > 0$ であることから

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

となり

$$0 < \alpha + \beta < \pi$$

である。このもとで

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であることから

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} &= \alpha + \beta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

(ii)

$-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ である実数 γ, θ を用いて $\gamma = \tan^{-1} \frac{1}{4}, \theta = \tan^{-1} \frac{1}{x}$ とおくと

$$\tan \gamma = \frac{1}{4}, \tan \theta = \frac{1}{x}$$

となる。さらに $\tan \gamma > 0$ であることから

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

となり

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma + \theta < \pi$$

である。(i)の結果を用いて

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

となることから

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} &= \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &= \gamma + \theta \\ \Leftrightarrow \tan(\gamma + \theta) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\tan \gamma + \tan \theta}{1 - \tan \gamma \tan \theta} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{4x}} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

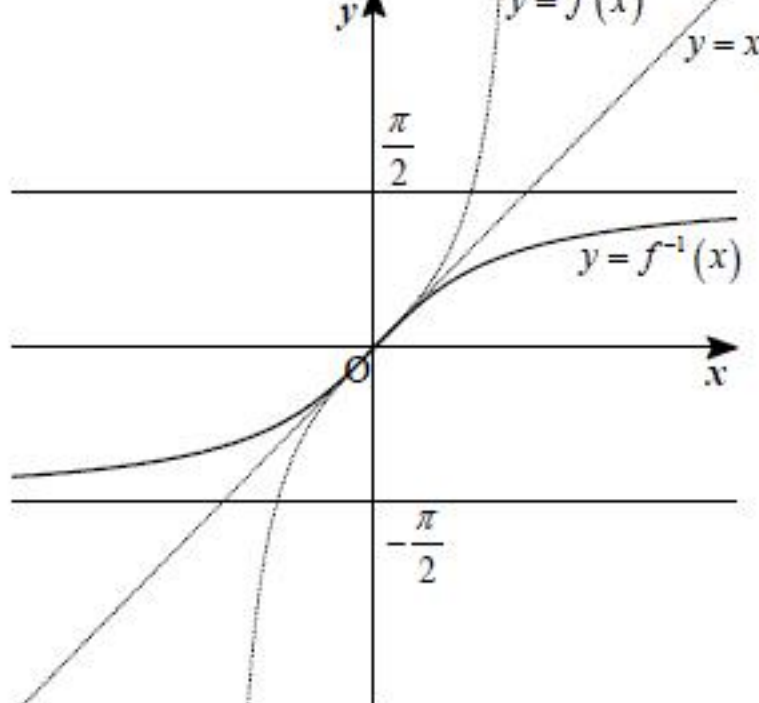
である。

$$(\text{答}) x = \frac{5}{3}$$

(2)

(i)

逆関数の性質より、 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したものである。よって、 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(ii)

$y = f^{-1}(x)$ のとき $x = \tan y$ であるから、両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \\ &= \frac{1}{\tan^2 y + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

である。よって、(i)のグラフの点 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ のにおける接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1^2 + 1}(x - 1) + \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(iii)

(ii)の過程より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

(3)

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

である。ここで、 $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \theta &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} (2x + 1) \right\} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + x + 1} &= \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4} \tan^2 \theta + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

となる。また

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

となるから

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{4}{3} \cos^2 \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \theta + C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} (2x + 1) \right\} + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数とする。

$$(\text{答}) \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} (2x + 1) \right\} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$