

【解答】

問 1 (1)

問 2 (5)

問 3 (1)

問 4 (3)

問 5 (2)

【解説】

[1]問 1

$$\begin{aligned}(x-2)(x+3)(x+4)(x-6) &= \{(x+3)(x+4)\}\{(x-2)(x-6)\} \\ &= (x^2+7x+12)(x^2-8x+12)\end{aligned}$$

となるので、 $a > 0, b > 0$ より

$$a = 7, b = 8$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(x-2)(x+3)(x+4)(x-6)+54x^2 &= (x^2+7x+12)(x^2-8x+12)+54x^2 \\ &= \{(x^2+12)+7x\}\{(x^2+12)-8x\}+54x^2 \\ &= (x^2+12x)^2-x(x^2+12)-2x^2 \\ &= \{(x^2+12x)+x\}\{(x^2+12x)-2x\} \\ &= (x^2-2x+12)(x^2+x+12)\end{aligned}$$

となるので、 $c > 0, d > 0$ より

$$c = 2, d = 1$$

となる。以上より

$$(a, b, c, d) = (7, 8, 2, 1)$$

となる。

[2]問 2

$$\begin{aligned}\sqrt{18-12\sqrt{2}} &= \sqrt{6(3-2\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{6(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \sqrt{6}(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18-12\sqrt{2}}} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= 2+\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

[3]問 3

$|x+1| < a$ をみたす整数 x が 5 個存在するとき、その 5 個の整数は $x = -1$ を中心として

$$x = -3, -2, -1, 0, 1$$

となる。このとき $a = 3$ となる。

問 4

$$x^2 - (2b+c)x + b^2 + bc \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-b)\{x-(b+c)\} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq x \leq b+c$$

となる。 $b, b+c$ は整数なので、これをみたす整数 x の個数は

$$b+c-b+1 = c+1$$

となる。

問 5

A の要素が 5 個のとき、問 3 より $a = 3$ となる。このとき $\overline{A}$ は「 -4 以下の整数と 2 以上の整数」

となる。また、問 4 より B は「 b 以上 $b+c$ 以下の整数」となる。

[1] $b \leq -5$ のとき

このとき、 $\overline{A} \cap B$ は少なくとも $-5, -4$ を含むので、適さない。

[2] $b = -4$ のとき

このとき、 $c = 1, 2, 3, 4, 5$ であれば、 $\overline{A} \cap B$ の要素は -4 のみとなり、適する。

[3] $b = -3, -2, -1, 0, 1$ のとき

このとき、それぞれ $c = 5, 4, 3, 2, 1$ のときに $\overline{A} \cap B$ の要素は 2 のみとなり、適する。

[4] $b \geq 2$ のとき

このとき、 $\overline{A} \cap B$ は少なくとも $2, 3$ を含むので、適さない。

以上 [1], [2], [3], [4] より、求める (b, c) の組は

$$0+5+5+0=10$$

通りある。

〔解答〕

問 6 (1)

問 7 (4)

問 8 (2)

問 9 (4)

問 10 (3)

〔解説〕

[1]問 6

万の位が 0 以外であればよいので、5 桁の数は全部で

$$4 \times 4! = 96$$

個ある。

問 7

5 桁の数のうち、10000 の形をしているものは

$$4! = 24$$

個ある。20000 の形をしているものは

$$3! = 6$$

個ある。21000 の形をしているものは

$$3! = 6$$

個ある。23000 の形をしているものは

$$2! = 2$$

個ある。この後に来る数字は小さい順に 23104, 23140 であるから、23140 より小さいものは

$$24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 39$$

個ある。

[2]問 8

万の位が 0 以外であればよく、2 つの 0 は区別しないので、5 桁の数は全部で

$$3 \times \frac{4!}{2!} = 36$$

個ある。

問 9

偶数となる必要十分条件は、一の位が 0 または 2 であることである。一の位が 0 となるのは、万の位が 0 以外であればよいので

$$3 \times 3! = 18$$

個ある。一の位が 2 となるのは、万の位が 0 以外であればよく、残りの位で使われる 2 つの 0 は区別しないので

$$2 \times \frac{3!}{2!} = 6$$

個ある。よって、偶数は全部で

$$18 + 6 = 24$$

個ある。

問 10

5 桁の数のうち、10000 の形をしているものは、2 つの 0 は区別しないので

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

個ある。20000 の形をしているものは

$$3! = 6$$

個ある。21000 の形をしているものは、2 つの 0 は区別しないので

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

個ある。この後に来る数字は小さい順に 23001, 23010, 23100 であるから、23100 より小さいものは

$$12 + 6 + 3 + 2 = 23$$

個ある。

〔解答〕

問 11 (2)

問 12 (1)

問 13 (3)

問 14 (4)

問 15 (3)

〔解説〕

[1]問 11

$$\begin{aligned}\sin 140^\circ &= \sin(180^\circ - 40^\circ) \\ &= \sin 40^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 130^\circ &= \cos(180^\circ - 50^\circ) \\ &= -\cos 50^\circ \\ &= -\cos(90^\circ - 40^\circ) \\ &= -\sin 40^\circ\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\sin 140^\circ + \cos 130^\circ + \tan 120^\circ &= \sin 40^\circ + (-\sin 40^\circ) + (-\sqrt{3}) \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

[2]問 12

 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}1 + 2\sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= -\frac{4}{9}\end{aligned}$$

となる。

問 13

問 12 より $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において $\sin \theta \cos \theta < 0$ であるから、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ は不適である。したがって、

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

となり θ は鈍角となる。このとき、

$$\sin \theta > 0$$

$$\cos \theta < 0$$

となる。

問 14

問 12 より

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{17}{9}\end{aligned}$$

となる。 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ より

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

となるので

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

となる。

問 15

問 12 より

$$\begin{aligned}\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= -\frac{9}{4}\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

問 16 (2)

問 17 (3)

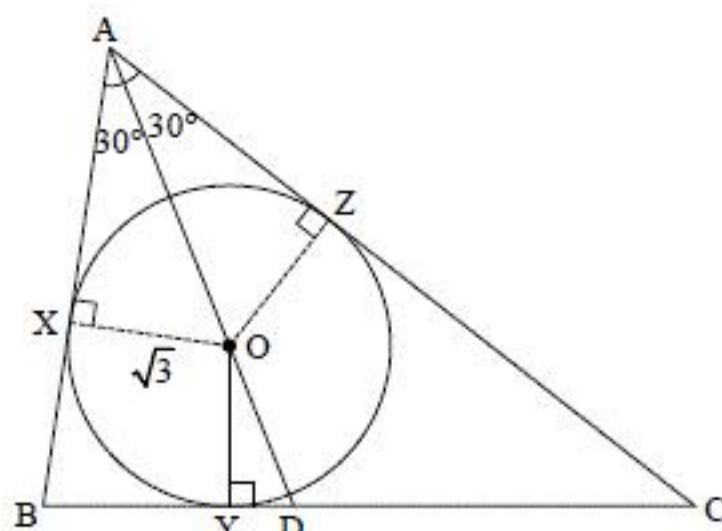
問 18 (4)

問 19 (3)

問 20 (1)

〔解説〕

問 16

線分 AD は $\angle A$ の二等分線であるため、

$$\begin{aligned} AB:AC &= BD:DC \\ &= 5:8 \end{aligned}$$

である。このとき、 AB , AC は正の実数 k を用いて

$$AB=5k, AC=8k$$

とおけるため、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ \\ &= (5k)^2 + (8k)^2 - 2 \cdot 5k \cdot 8k \cdot \frac{1}{2} \\ &= 49k^2 \\ \therefore BC &= 7k \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle ABC$ の面積を 2 通りで表すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \cdot \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot 8k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot (5k + 7k + 8k) \cdot \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{3}k^2 &= 10\sqrt{3}k \\ \therefore k &= 1 \end{aligned}$$

となり、

$$AB=5, AC=8, BC=7$$

である。

問 17

問 16 より $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 10\sqrt{3}k^2 \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

問 18

 $AD=a$ とおくと、 $\angle BAD=30^\circ$ より $\triangle ABD$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4}a \end{aligned}$$

となる。また、 $\angle CAD=30^\circ$ より $\triangle ACD$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2a \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle ABC$ の面積が $10\sqrt{3}$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}a + 2a &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{40\sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

となる。

問 19

中心角と円周角の関係より

$$\begin{aligned} \angle XYZ &= \frac{1}{2} \angle XOZ \\ &= \frac{1}{2} (360^\circ - \angle AXO - \angle AZO - \angle XAZ) \\ &= \frac{1}{2} (360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ) \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

となる。

問 20

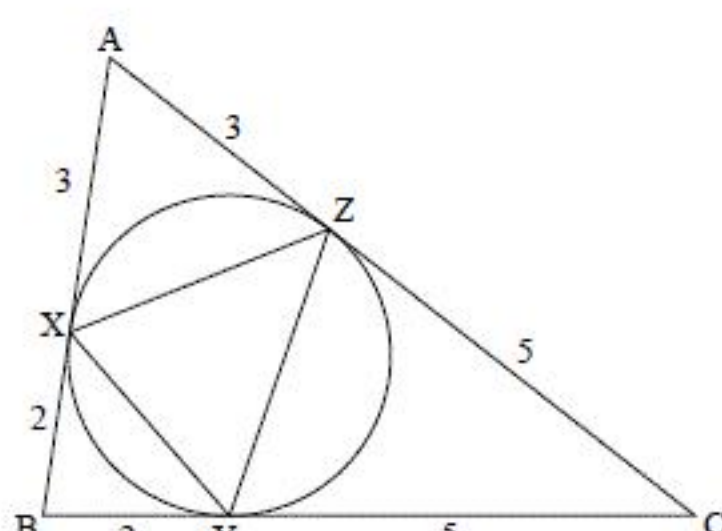
 $AX=x$, $BY=y$, $CZ=z$ とおくと、内接円の性質より

$$\begin{aligned} AZ &= AX \\ BX &= BY \\ CY &= CZ \end{aligned}$$

であるから、 $AB=5$, $BC=7$, $CA=8$ より

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5 = x + y \\ 7 = y + z \\ 8 = z + x \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = 3, y = 2, z = 5 \end{aligned}$$

となり、各点の位置関係は次図のようになる。

上図より、 $\triangle XYZ$ の面積は

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{7} \right) \right\} S &= \frac{3}{14} \cdot 10\sqrt{3} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

となる。