平　成　26　年　度

(ページ数)
2ページ

試験問題(記述式)——数　　学

(注意) 解答はすべて別紙解答用紙の定められた欄に書くこと。

1 以下の問に答えよ。

(1) $\left[\frac{1}{3}x+1\right]=[2x-1]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数である。

(2) $\triangle$ABC と，$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{0}$ $(k>0)$ を満たす点Mが存在する。点Aと点Mを通る直線と辺BCの交点をNとする。$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ のとき，k はいくらか。

(3) 初項が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が，漸化式 $a_{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=3a_1a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を満たしているとき，以下の問に答えよ。

(i) $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

(ii) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ が収束するかどうか調べよ。収束する場合には，その和を求めよ。

2 ある病気に関する3つの検査，A，B，Cがあり，3つの検査の結果はどれも陽性か陰性のどちらかである。n人に上記の3つの検査を行う。陽性になった検査の数がk個であった者の人数をn_kとする $(k=0,1,2,3)$。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $n=10$ のとき，起こり得る n_0，n_1，n_2，n_3 の組 (n_0,n_1,n_2,n_3) は全部で何通りあるか。

(2) $n=15$ のとき，起こり得る n_0，n_1 の組 (n_0,n_1) のうち，下記の条件1，2，3のすべてを満たすものは全部で何通りあるか。

条件1：検査Aで陽性となった者は5人

条件2：検査Aで陰性となり，検査Bで陽性となった者は6人

条件3：検査Bで陽性となり，検査Cで陰性となった者はいない

(3) $n=2m$ のとき，起こり得る n_0，n_1，n_3 の組 (n_0,n_1,n_3) のうち，下記の条件4，5の両方を満たすものは全部で何通りあるか。

条件4：検査Aで陽性となった者は m 人，陰性になった者も m 人

条件5：検査Bで陽性となり，検査Cで陰性となった者はいない

条件1：検査Aで陽性となった者は5人

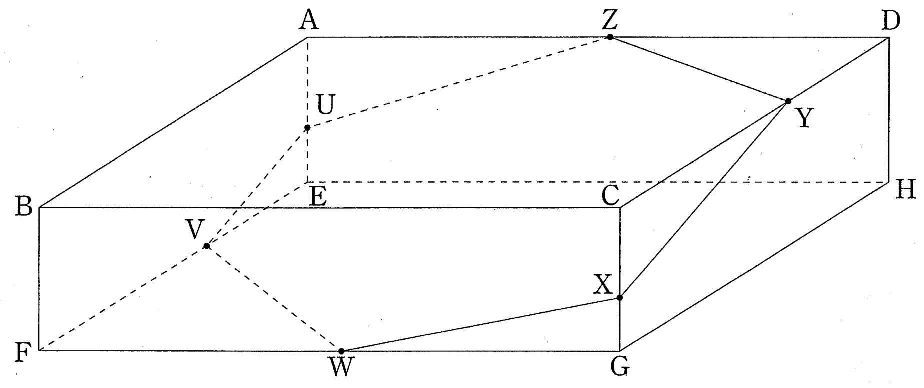
条件2：検査Aで陰性となり，検査Bで陽性となった者は6人

条件3：検査Bで陽性となり，検査Cで陰性となった者はいない

3 $AB=3$, $AD=4$, $AE=1$である図のような直方体ABCD-EFGHにおいて，辺CG，CD，ADをそれぞれ $1-p:p$ $(0<p<1)$ に分ける点をX，Y，Zとする。点X，Y，Zが作る平面をL，Lと2点A，Eを通る直線との交点，2点E，Fを通る直線との交点，2点F，Gを通る直線との交点をそれぞれU，V，Wとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$として以下の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{AU}$，$\overrightarrow{AV}$，$\overrightarrow{AW}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表し，U，V，Wがそれぞれ辺AE，EF，FG上にあることを示せ。

(2) 六角形UVWXYZの面積はいくらか。



4 $y=f(x)=\tan x\ (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ -\infty<y<\infty)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)=\tan^{-1}x\ (-\infty<x<\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$ とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) (i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ はいくらか。

(ii) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{x}$ を満たす実数xを求めよ。

(2) (i) $y=f^{-1}(x)$ のグラフの概形を描け。

(ii) (i)のグラフの点 $(1,\ \frac{\pi}{4})$ における接線を求めよ。

(iii) 導関数 $(\tan^{-1}x)'$ を求めよ。

(3) 不定積分 $\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$ を求めよ。