

[解答]

(2)

[解説]

$$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

$$g(x) = x^2 + 6x + 4 = \{x - (-3 - \sqrt{5})\} \{x - (-3 + \sqrt{5})\}$$

であるから、 $-3 - \sqrt{5} < -2 < -3 + \sqrt{5} < 1$ に注意すると、

$$f(x) \geq 0 \text{ かつ } g(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{「} x \leq -2, x \geq 1 \text{」 かつ 「} -3 - \sqrt{5} \leq x \leq -3 + \sqrt{5} \text{」}$$

$$\Leftrightarrow -3 - \sqrt{5} \leq x \leq -2$$

となる。また、

$$f(x) \leq 0 \text{ かつ } g(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{「} -2 \leq x \leq 1 \text{」 かつ 「} -3 - \sqrt{5} \leq x \leq -3 + \sqrt{5} \text{」}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -3 + \sqrt{5}$$

となる。したがって

$$\alpha = -3 - \sqrt{5}, \beta = -2, \gamma = -3 + \sqrt{5}$$

であるから、

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta} = \frac{-2 - (-3 - \sqrt{5})}{-3 + \sqrt{5} - (-2)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。

【解答】

(2)

【解説】

4点を $A(1, 2)$, $B(15, 16)$, $C(1+a, 2-a)$, $D(15+a, 65-a)$ とする。直線 AB の方程式は

$y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$ であるから、辺 AB 上の格子点の個数、すなわち

「 $y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$ かつ $1 \leq x \leq 15$ 」を満たす整数 (x, y) の組の個数

は $(1, 2)$, $(3, 9)$, $\dots$, $(15, 65)$ の8個である。また、四角形 $ABCD$ が平行四辺形であり、かつ a が整数であることより、辺 CD 上の格子点の個数も同様に8個である。以上の合計16個で辺 AB 及び辺 CD 上の格子点の個数を、点 A, B, C, D を含めて数えたことになる。よって平行四辺形 $ABCD$ の辺上の格子点の個数が20個となるのは、

辺 AC 上の点 A 及び点 C を除いた格子点の個数が2個

となるときであり、このとき、辺 AD 上の点 A 及び点 D を除いた格子点の個数も同様に2個となる。直線 AC の方程式は $y = -x + 3$ であるから、上記の条件は

「 $y = -x + 3$ かつ $1 < x < 1+a$ 」を満たす整数 (x, y) の組の個数が2個

と言い換えることが出来る。ここで、「 $y = -x + 3$ かつ $1 < x < 1+a$ 」を満たす整数 (x, y) の組の個数は、 a が正の整数であることより $(2, 1)$, $(3, 0)$, $\dots$, $(a, -a+3)$ の $a-1$ 個であるから、条件は

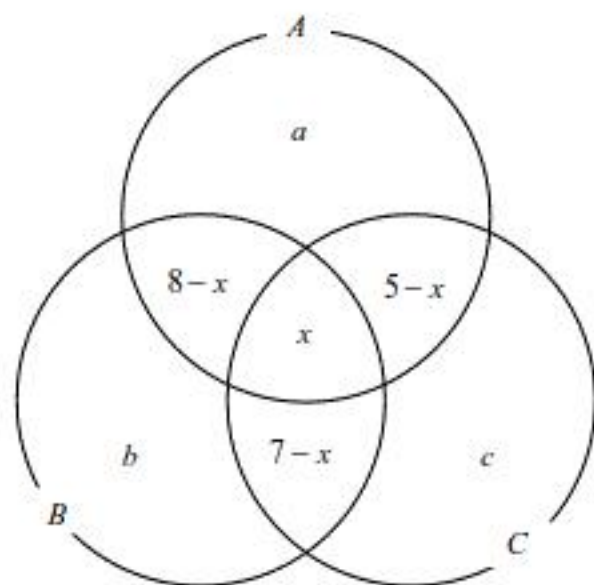
$$a-1=2 \Leftrightarrow a=3$$

となる。

[解答]

(2)

[解説]



$n(A \cap B \cap C) = x (\geq 0)$ とおくと、それぞれの部分集合の要素の個数は前図のようになる。

$n(A) = 10, n(B) = 12, n(C) = 15$ であるから、前図より

$$\begin{cases} a+x+(8-x)+(5-x)=10 \\ b+x+(8-x)+(7-x)=12 \\ c+x+(7-x)+(5-x)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x-3 \\ b=x-3 \\ c=x+3 \end{cases}$$

となる。ここで、それぞれの部分集合の要素の個数は0以上であるから、

$$5-x \geq 0 \text{ かつ } 7-x \geq 0 \text{ かつ } 8-x \geq 0 \text{ かつ } a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ かつ } c \geq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 5$$

となる。したがって $d = a + b + c = 3x - 3$ のとりうる値は、6, 9, 12 の3通りのみである。以上より、答えは

$$6+9+12=27$$

となる。

〔解答〕

(5)

〔解説〕

4回の移動ですべての箱に玉が入らない確率を考える。

[1] 1回目の移動で玉がBに移動するとき

残りの3回の移動でBとA、もしくはBとCの間でのみ玉が移動する場合を考えればよいから、このときの確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{1}{8}$$

である。

[2] 1回目の移動で玉がCに移動するとき

同様に考えると、このときの確率も $\frac{1}{8}$ であると分かる。

以上[1],[2]より、4回の移動ですべての箱に玉が入らない確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

である。したがって4回の移動ですべての箱に球が入ることになる確率は、

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

である。

[解答]

(4)

[解説]

 $t = x + 1$ ($t > 1$) とおくと,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(2x + \frac{27}{x+1} + 2\right) \left(x + \frac{6}{x+1} + 1\right) \\
 &= \left(2t + \frac{27}{t}\right) \left(t + \frac{6}{t}\right) \\
 &= 2t^2 + \frac{162}{t^2} + 39
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $2t^2, \frac{162}{t^2}$ はともに正だから、相加平均と相乗平均の関係により

$$\begin{aligned}
 f(x) &\geq 2\sqrt{2t^2 \times \frac{162}{t^2}} + 39 \\
 &= 75
 \end{aligned}$$

が得られる。等号が成立するのは

$$\begin{aligned}
 2t^2 &= \frac{162}{t^2} \\
 \Leftrightarrow t^4 &= 81 \\
 \therefore t &= 3 \quad (\because t > 1)
 \end{aligned}$$

のときであり、このとき $x = 3 - 1 = 2$ である。以上より $\alpha = 75, \beta = 2$ であるから、 $\alpha + \beta = 77$ となる。

[解答]

(3)

[解説]

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{1+4i} + \frac{1}{2+3i} + \frac{1}{3+2i} + \frac{1}{4+i} \\
 &= \frac{1-4i}{17} + \frac{2-3i}{13} + \frac{3-2i}{13} + \frac{4-i}{17} \\
 &= \frac{5-5i}{17} + \frac{5-5i}{13} \\
 &= \frac{150(1-i)}{221}
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 |c-\bar{c}| &= \left| \frac{150(1-i)}{221} - \frac{150(1+i)}{221} \right| \\
 &= \left| -\frac{300}{221}i \right| \\
 &= \frac{300}{221}
 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(3)

〔解説〕

円 $x^2 + y^2 = 5^2$ と直線 $x - 7y + 25 = 0$ の方程式から x を消去すると,

$$(7y - 25)^2 + y^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y + 12 = 0$$

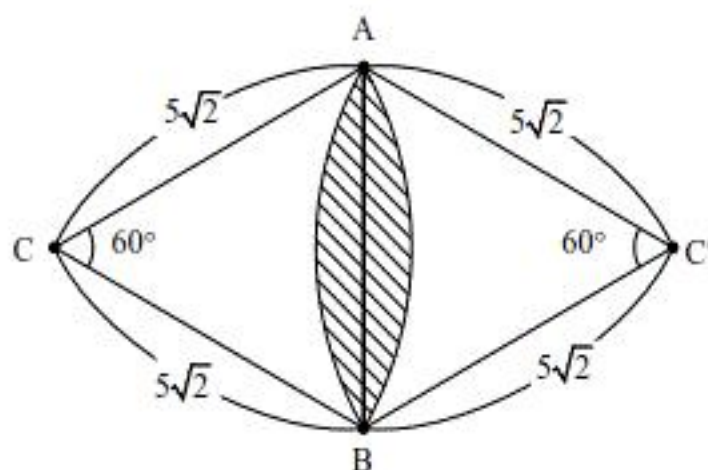
$$\Leftrightarrow (y - 3)(y - 4) = 0$$

$$\therefore y = 3, 4$$

となり, このそれぞれの y に対して $x = 7y - 25$ により x を求めると, $x = -4, 3$ となる。よって円と直線の2つの交点の座標は $(-4, 3), (3, 4)$ である。この交点をそれぞれ A, B とすると,

$$AB = \sqrt{\{3 - (-4)\}^2 + \{4 - 3\}^2} = 5\sqrt{2}$$

となる。このことより, 2点 A, B を通る半径 $5\sqrt{2}$ の2つの円の中心をそれぞれ C, C' とすると $\triangle ABC$ および $\triangle ABC'$ は正三角形となるから, この2つの円の重なる部分は下図の斜線部のようになる。



図の斜線部の面積は, 扇型 CAB と扇型 $C'AB$ の面積の和からひし形 $ACBC'$ の面積を引いたものであるから, 求める面積は

$$\left\{ \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{6} \right\} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot 2 = \frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}$$

となる。

[解答]

(5)

[解説]

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha + \sqrt{3} \sin \beta x + \cos \beta x \\ &= \alpha + 2 \sin \left(\beta x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ の最大値が5であるから、 $\alpha = 3$ となる。また周期が 3π であるから

$$\begin{aligned} |\beta \times 3\pi| &= 2\pi \\ \therefore \beta &= \pm \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

[1] $\beta = \frac{2}{3}$ のとき

このとき $f(x) = 3 + 2 \sin \left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \right)$ である。 $0 \leq x \leq 3\pi$ において

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

であるから、この範囲で $f(x)$ の値が最大となるような x は、

$$\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

を満たす。よって $x_0 = \frac{\pi}{2}$ であり、

$$(\alpha + \beta) \times x_0 = \left(3 + \frac{2}{3} \right) \times \frac{\pi}{2} = \frac{11}{6}\pi$$

となる。

[2] $\beta = -\frac{2}{3}$ のとき

このとき $f(x) = 3 + 2 \sin \left(-\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \right)$ である。 $0 \leq x \leq 3\pi$ において

$$-2\pi + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$$

であるから、この範囲で $f(x)$ の値が最大となるような x は、

$$-\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}\pi$$

を満たす。よって $x_0 = \frac{5}{2}\pi$ であり、

$$(\alpha + \beta) \times x_0 = \left(3 - \frac{2}{3} \right) \times \frac{5\pi}{2} = \frac{35}{6}\pi$$

となる。

以上、[1]、[2]より $(\alpha + \beta) \times x_0 = \frac{11}{6}\pi, \frac{35}{6}\pi$ の2つが考えられるから、答えは(5)である。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$$\log_{10} 6^{\frac{1}{500}} = \frac{\log_{10} 6}{500}$$

である。ここで、

$$\sqrt{10} < 6 < 10$$

の常用対数をとって、

$$\log_{10} \sqrt{10} < \log_{10} 6 < \log_{10} 10$$

$$\Leftrightarrow 0.5 < \log_{10} 6 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.5}{500} < \frac{\log_{10} 6}{500} < \frac{1}{500}$$

$$\Leftrightarrow 0.001 < \log_{10} 6^{\frac{1}{500}} < 0.002$$

が得られる。したがって $\log_{10} 6^{\frac{1}{500}}$ は小数第1位から2位まで0が続き、3位で初めて0以外の数字1が現れる数である。よって $n=2, k=1$ であり、 $n+k=3$ となる。

【解答】

(1)

【解説】

$f(x) = x^2 - 4x + \frac{5}{2}$ とおく。 $f'(x) = 2x - 4$ であるから、放物線 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ にお

ける接線の方角ベクトルの1つに $(1, 2p - 4)$ がある。このベクトルは「点 $(p, f(p))$ での

$y = f(x)$ の法線」の法線ベクトルの1つでもあるから、この法線の式は

$$1 \cdot (x - p) + (2p - 4) \cdot \{y - f(p)\} = 0$$

となる。よってこの法線が点 $(2, 0)$ を通るとき、

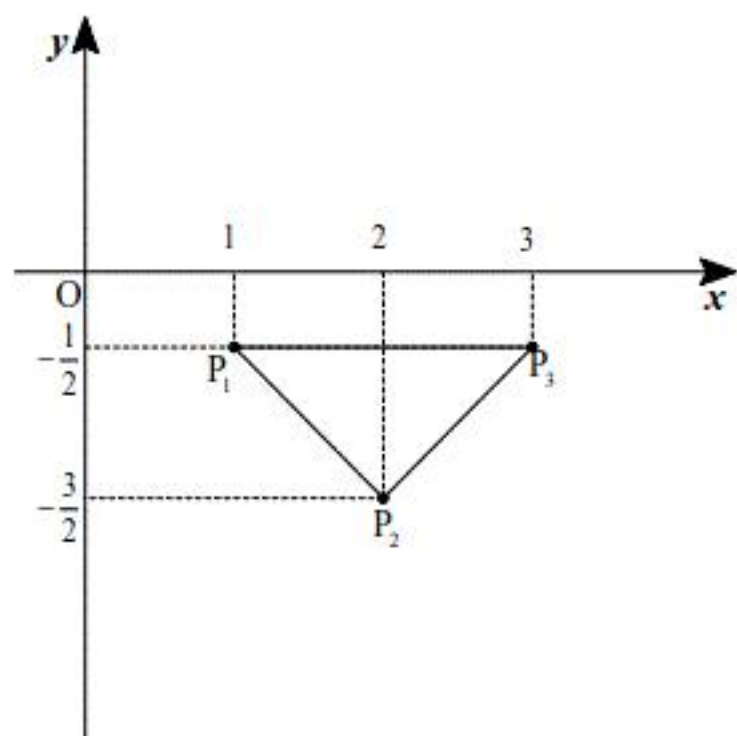
$$(2 - p) + (2p - 4) \left\{ 0 - \left(p^2 - 4p + \frac{5}{2} \right) \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 2)(p - 1)(p - 3) = 0$$

$$\therefore p = 1, 2, 3$$

となる。よって P_1, P_2, P_3 の座標をそれぞれ $(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3))$, すなわち

$\left(1, -\frac{1}{2}\right), \left(2, -\frac{3}{2}\right), \left(3, -\frac{1}{2}\right)$ としても一般性を失わない。



$\triangle P_1P_2P_3$ の面積は、前図より

$$\frac{1}{2} \times (3 - 1) \times \left\{ -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) \right\} = 1$$

となる。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})} + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} \\
 &= (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2} \\
 &= \frac{3}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})
 \end{aligned}$$

となるから、 $T = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} \right)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{100} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \\
 &= \frac{3}{2} (\sqrt{101} + \sqrt{100} - \sqrt{1} - \sqrt{0}) \\
 &= \frac{3}{2} (9 + \sqrt{101})
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} (9 + \sqrt{10^2}) &< T < \frac{3}{2} (9 + \sqrt{10.1^2}) \\
 \Leftrightarrow 28.5 &< T < 28.65
 \end{aligned}$$

であるから、 T の整数部分は28である。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

$|\overline{OB}| = b (> 0)$ とおく。

$$\begin{aligned}
 |\overline{OP}|^2 &= |\overline{OA} + s\overline{OB}|^2 \\
 &= |\overline{OA}|^2 + 2|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos\theta + s^2|\overline{OB}|^2 \\
 &= 16 + 8bs\cos\theta + b^2s^2 \\
 &= b^2\left(s + \frac{4\cos\theta}{b}\right)^2 + 16 - 16\cos^2\theta \\
 &= b^2\left\{s - \left(-\frac{4\cos\theta}{b}\right)\right\}^2 + 16\sin^2\theta
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|\overline{OP}|$ が $s = -3$ で最小値 2 をとることから、 $|\overline{OP}|^2$ は $s = -3$ で最小値 $2^2 = 4$ をとる。したがって

$$\begin{cases} -\frac{4\cos\theta}{b} = -3 \\ 16\sin^2\theta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}\cos\theta \\ \sin^2\theta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $\sin\theta > 0$ であるから $\sin\theta = \frac{1}{2}$ であり、さらに $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{6}$ と分

かる。また、これを代入して $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ が得られるが、これは $b > 0$ に矛盾しない。

【解答】

(3)

【解説】

点 P' の座標を (X, Y, Z) とおく。直線 $l: (x, y, z) = (5, -2, 3) + s(-2, 2, 1)$ に関して $P(2, 2, -2)$ と $P'(X, Y, Z)$ が対称であるから、 PP' の中点 $\left(\frac{2+X}{2}, \frac{2+Y}{2}, \frac{-2+Z}{2}\right)$ は直線 l 上に存在する。

すなわち

$$\begin{cases} \frac{2+X}{2} = 5-2s \\ \frac{2+Y}{2} = -2+2s \\ \frac{-2+Z}{2} = 3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -4s+8 \\ Y = 4s-6 \\ Z = 2s+8 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす s が存在する。また、 $\overrightarrow{PP'} = (X-2, Y-2, Z+2)$ と直線 l の方向ベクトルの1つである $(-2, 2, 1)$ が直交するから、

$$\begin{aligned} -2 \cdot (X-2) + 2 \cdot (Y-2) + 1 \cdot (Z+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2X + 2Y + Z &= -2 \end{aligned}$$

となる。これに①式を代入して、

$$\begin{aligned} -2(-4s+8) + 2(4s-6) + (2s+8) &= -2 \\ \Leftrightarrow s &= 1 \end{aligned}$$

が得られるから、点 P' の座標は①より $(4, -2, 10)$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OP'}|} \\ &= \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 10}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 10^2}} \\ &= \frac{-16}{12\sqrt{10}} \\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{15} \end{aligned}$$

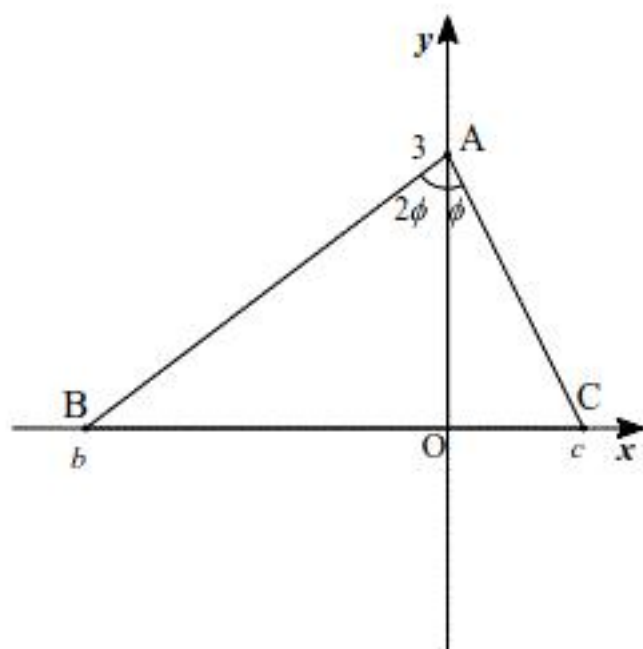
となる。

[解答]

(2)

[解説]

$\angle CAO = \phi$ とおくと、 $\angle BAO = 2\phi$ である。 $\triangle ABC$ を図示すると以下のようなになる。



$BC = OC + OB = 3\tan\phi + 3\tan 2\phi$ である。したがって $\triangle ABC$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (3\tan\phi + 3\tan 2\phi) \times 3 \\ &= \frac{9}{2} (\tan\phi + \tan 2\phi) \end{aligned}$$

となる。 $\theta = 3\phi$ であるから、 $\theta \rightarrow 0$ では $\phi \rightarrow 0$ となり、

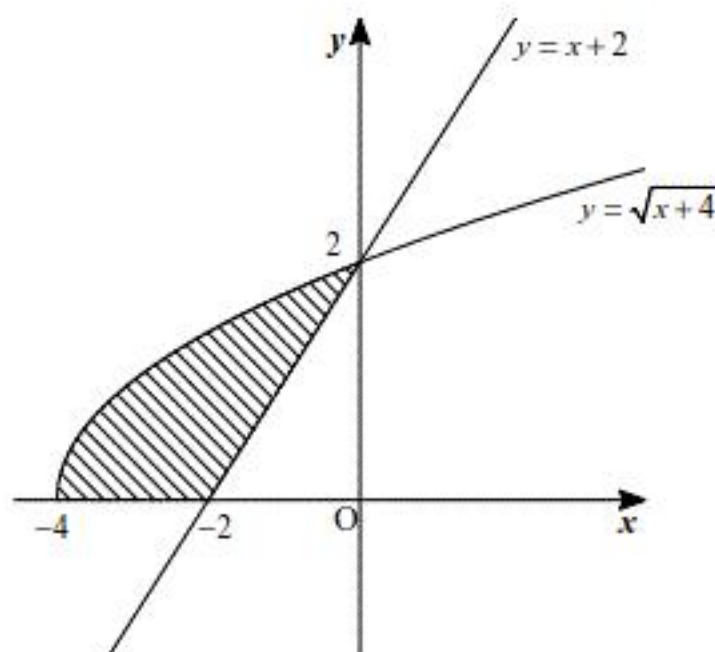
$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S}{\theta} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2} (\tan\phi + \tan 2\phi)}{3\phi} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{3}{2} \times \left(\frac{\tan\phi}{\phi} + 2 \cdot \frac{\tan 2\phi}{2\phi} \right) \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sin\phi}{\phi} \cdot \frac{1}{\cos\phi} + 2 \cdot \frac{\sin 2\phi}{2\phi} \cdot \frac{1}{\cos 2\phi} \right) \\ &= \frac{3}{2} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(4)

〔解説〕



曲線 $y = \sqrt{x+4}$ と直線 $y = x+2$ と x 軸で囲まれた領域は前図の斜線部のようになる。ここで、

$$y = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x+4 \text{ かつ } y \geq 0$$

$$\therefore x = y^2 - 4 \text{ かつ } y \geq 0$$

となり、

$$y = x+2 \Leftrightarrow x = y-2$$

となるから、この斜線部を y 軸の周りに1回転させてできた立体の体積を V とおくと、

$$V = \int_0^2 \left\{ \pi(y^2 - 4)^2 - \pi(y-2)^2 \right\} dy$$

$$= \pi \int_0^2 (y^4 - 9y^2 + 4y + 12) dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} y^5 - 3y^3 + 2y^2 + 12y \right]_0^2$$

$$= \left(\frac{32}{5} - 24 + 8 + 24 \right) \pi$$

$$= \frac{72}{5} \pi$$

となる。