

(1)

$CA=b$ とおく。 a, b, c は正の実数だから、余弦定理より

$$\begin{aligned} a \cos A &= c \cos C \\ \Leftrightarrow a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \Leftrightarrow a^2(b^2 + c^2 - a^2) &= c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)b^2 - (a^4 - c^4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)b^2 - (a^2 - c^2)(a^2 + c^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)\{b^2 - (a^2 + c^2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 0 \text{ または } b^2 - (a^2 + c^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a = c \text{ または } b^2 = a^2 + c^2 \end{aligned}$$

となる。よって、三角形 ABC は

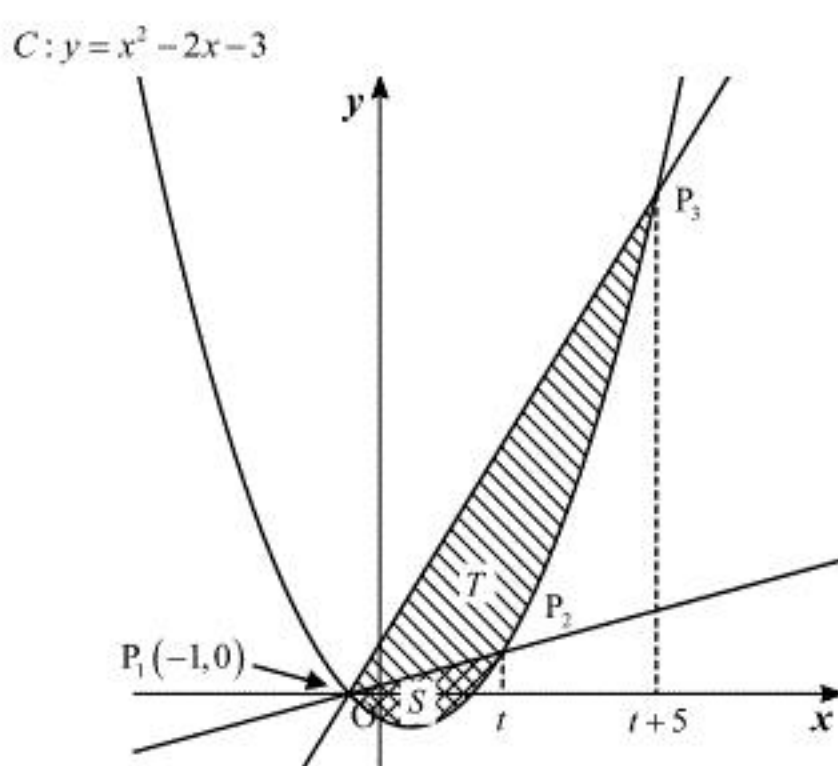
$AB=BC$ の二等辺三角形または $\angle B=90^\circ$ の直角三角形

である。

(答) $AB=BC$ の二等辺三角形または $\angle B=90^\circ$ の直角三角形

(2)

t を実数として P_2 の x 座標を t とおくと、題意より P_3 の x 座標は $t+5$ である。このとき、線分 P_1P_2 と C で囲まれる図形の面積を S 、線分 P_1P_3 と C で囲まれる面積を T とすると、その領域は以下の斜線部のように図示できる。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^t (x+1)(x-t) dx \right| = \left| -\frac{1}{6}(t+1)^3 \right| = \frac{1}{6}|t+1|^3 \\ T &= \left| \int_{-1}^{t+5} (x+1)\{x-(t+5)\} dx \right| = \left| -\frac{1}{6}(t+5+1)^3 \right| = \frac{1}{6}|t+6|^3 \end{aligned}$$

と求まる。題意より $T=8S$ であるから

$$\begin{aligned} T &= 8S \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}|t+6|^3 &= 8 \cdot \frac{1}{6}|t+1|^3 \\ \Leftrightarrow |t+6|^3 &= |2t+2|^3 \\ \Leftrightarrow t+6 &= \pm(2t+2) \\ \therefore t &= 4, -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。 P_2 の y 座標に対する P_3 の y 座標の比を r とおくと、 $t=4$ のとき

$$r = \frac{9^2 - 2 \cdot 9 - 3}{4^2 - 2 \cdot 4 - 3} = \frac{60}{5} = 12$$

となり、 $t = -\frac{8}{3}$ のとき

$$r = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{3} - 3}{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) - 3} = \frac{-\frac{20}{9}}{\frac{85}{9}} = -\frac{4}{17}$$

となる。

(答) 12 倍または $-\frac{4}{17}$ 倍

(3)

平面上の n 個の円に、 $n+1$ 個目の円を追加すると、既存の n 個の円とそれぞれ新たに 2 つずつ交点を作るから、すべての交点の数を表す数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1} = a_n + 2n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。よって

$$\begin{aligned} a_p - a_q &= a_{q+4} - a_q \quad (\because p-q=4) \\ &= \{a_q + 2q + 2(q+1) + 2(q+2) + 2(q+3)\} - a_q \\ &= 4(2q+3) \end{aligned}$$

となる。題意より $a_p - a_q = 140$ であるから

$$\begin{aligned} 4(2q+3) &= 140 \\ \therefore q &= 16 \end{aligned}$$

となり、 $p = q+4 = 20$ と求まる。

(答) $p = 20$

(1)(i)

 $c=4$ のとき、多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = (x-2)^{2n+1} (x+2)^{2n} (x^2+4)^{2n} = (x-2)(x^2-4)^{2n} (x^2+4)^{2n} = (x-2)(x^4-16)^{2n}$$

となる。また、この多項式は $2n \cdot 4 + 1 = 8n + 1$ 次であるから、 $f(x)$ は

$$f(x) = a_{8n+1}x^{8n+1} + a_{8n}x^{8n} + \cdots + a_1x + a_0$$

と展開できる。したがって、

$$f(1) = a_{8n+1} + a_{8n} + \cdots + a_1 + a_0$$

$$f(0) = a_0$$

である。よって、求める値は

$$\sum_{k=1}^{8n+1} a_k = f(1) - f(0) = -1 \cdot (1-16)^{2n} - (-2) \cdot (-16)^{2n} = 2 \cdot 256^n - 225^n$$

となる。

(答) $2 \cdot 256^n - 225^n$

(ii)

 $c=2, n=17$ のとき、多項式 $f(x)$ は(i)と同様に整理すると

$$f(x) = (x - \sqrt{2})(x^4 - 4)^{34}$$

となり、二項定理より

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \sqrt{2}) \cdot \sum_{l=0}^{34} {}_{34}C_l \cdot (-4)^l \cdot x^{4(34-l)} \\ &= (x - \sqrt{2}) \left\{ \sum_{l=0}^{17} {}_{34}C_{2l} \cdot 4^{2l} \cdot x^{4(34-2l)} - \sum_{l=1}^{17} {}_{34}C_{2l-1} \cdot 4^{2l-1} \cdot x^{4(35-2l)} \right\} \end{aligned}$$

となる。今、 x^k の係数である a_k が最大であるときを考えているので、 $a_k > 0$ を満たす a_k のみを考えればよい。 $a_k > 0$ を満たす a_k は

$$a_{4(34-2l)+1} = {}_{34}C_{2l} \cdot 4^{2l} \quad (l=0, 1, 2, \dots, 17)$$

$$a_{4(35-2l)} = {}_{34}C_{2l-1} \cdot 4^{2l-1} \cdot \sqrt{2} \quad (l=1, 2, 3, \dots, 17)$$

となる。ここで、 $b_l = a_{4(34-2l)+1}$, $c_l = a_{4(35-2l)}$ とおき、 b_l, c_l それぞれの最大値を調べた後、その最大値を比べることで a_k の最大値を求める。まず、 b_l について

$$\begin{aligned} \frac{b_{l+1}}{b_l} &= \frac{{}_{34}C_{2(l+1)} \cdot 4^{2(l+1)}}{{}_{34}C_{2l} \cdot 4^{2l}} \\ &= \frac{34!}{\{2(l+1)\}! \{34-2(l+1)\}!} \cdot \frac{(2l)!(34-2l)!}{34!} \cdot 4^2 \\ &= \frac{16(34-2l)(33-2l)}{(2l+2)(2l+1)} \\ &= \frac{16(17-l)(33-2l)}{(l+1)(2l+1)} \quad (l=0, 1, 2, \dots, 16) \end{aligned}$$

は、分母が増加数列、分子が減少数列であるから、減少数列であり

$$\begin{aligned} \frac{b_{14}}{b_{13}} &= \frac{16 \cdot 4 \cdot 7}{14 \cdot 27} = \frac{32}{27} > 1 \\ \frac{b_{15}}{b_{14}} &= \frac{16 \cdot 3 \cdot 5}{15 \cdot 29} = \frac{16}{29} < 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_{13} < b_{14} > b_{15} > b_{16} > b_{17}$$

となる。よって、最大となるのは b_{14} である。次に、 c_l について

$$\begin{aligned} \frac{c_{l+1}}{c_l} &= \frac{{}_{34}C_{2(l+1)-1} \cdot 4^{2(l+1)-1} \cdot \sqrt{2}}{{}_{34}C_{2l-1} \cdot 4^{2l-1} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{34!}{(2l+1)! \{34-(2l+1)\}!} \cdot \frac{(2l-1)! \{34-(2l-1)\}!}{34!} \cdot 4^2 \\ &= \frac{16(35-2l)(34-2l)}{(2l+1) \cdot 2l} \\ &= \frac{16(17-l)(35-2l)}{l(2l+1)} \quad (l=1, 2, 3, \dots, 16) \end{aligned}$$

は、分母が増加数列、分子が減少数列であるから、減少数列であり

$$\begin{aligned} \frac{c_{14}}{c_{13}} &= \frac{16 \cdot 4 \cdot 9}{13 \cdot 27} = \frac{64}{39} > 1 \\ \frac{c_{15}}{c_{14}} &= \frac{16 \cdot 3 \cdot 7}{14 \cdot 29} = \frac{24}{29} < 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{13} < c_{14} > c_{15} > c_{16} > c_{17}$$

となる。よって、最大となるのは c_{14} である。最後に、 b_{14}, c_{14} について

$$\frac{b_{14}}{c_{14}} = \frac{{}_{34}C_{28} \cdot 4^{28}}{{}_{34}C_{27} \cdot 4^{27} \cdot \sqrt{2}} = \frac{34!}{28!6!} \cdot \frac{27!7!}{34!} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

であるから、 $b_{14} < c_{14}$ である。したがって、 a_k は

$$c_{14} = a_{4(35-28)} = a_{28}$$

で最大となる。以上より求める k の値は 28 である。(答) $k=28$

(2)(i)

題意より $S_o + S_e = S_1 + S_2$ である。また、 S_1 と S_e について

$$\begin{aligned} S_e &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2c \cdot k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{ck} = \frac{1}{2} S_1 \\ \therefore S_1 &= 2S_e \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $S_o + S_e = S_1 + S_2$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned} S_o + S_e &= 2S_e + S_2 \\ \therefore S_o - S_e &= S_2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_o - S_e = S_2$

(ii)

(i)より $S_o - S_e = S_2$ であるから

$$S_o - S_e = S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c(n+k)} = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

である。よって、区分布積法により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_o - S_e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right) = \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{c} [\log(1+x)]_0^1 = \frac{\log 2}{c}$$

となる。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_o - S_e) = 1$ のとき

$$\frac{\log 2}{c} = 1 \Leftrightarrow c = \log 2$$

である。

(答) $c = \log 2$

(1)

それぞれの硬貨について、1回の試行で表が出ることと裏が出ことは同様に確からしいとする。500 円、100 円、50 円の硬貨1枚ずつに対し、もらえる金額が600 円以上となるのは500 円と100 円をともにもらった場合であり、50 円には依存しない。したがって、500 円と100 円についてのみ考えればよい。

1回目の試行で終わるとき、1回の試行で500 円、100 円がともに表となればよいから、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。また、2回目の試行で終わるとき、1回目の試行で500 円、100 円のいずれかをもらい、2回目の試行でもう一方をもらう場合と、2回目の試行で500 円、100 円をともにもらう場合があるので、求める確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

である。

(答) 1回目の試行で終わる確率: $\frac{1}{4}$, 2回目の試行で終わる確率: $\frac{5}{16}$

(2)

(1)と同様に500 円と100 円についてのみ考えればよい。 k 回の試行以内に終わるとき、500 円と100 円はともに k 回の試行以内に表が出る。ここで、1枚の硬貨について k 回の試行以内に表が出る確率は、 k 回の試行で少なくとも1回表が出る確率に等しく、 k 回の試行すべてで裏が出る場合を余事象として考えることによって

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

となる。よって、 k 回の試行以内に終わる確率は、500 円と100 円について、ともに k 回の試行以内に表が出る確率であるから

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^2$$

となる。

(答) $\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^2$

(3)

500 円、100 円、100 円の硬貨1枚ずつに対し、もらえる金額が600 円以上となるのは、100 円の少なくとも一方と500 円をもらう場合である。 k 回の試行以内に500 円をもらう確率は、(2)と同様に

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

である。また、 k 回の試行以内に100 円の少なくとも一方をもらう確率は、 k 回の試行で少なくとも片方の硬貨で1回以上表が出る確率に等しく、 k 回の試行でともに表が出ない場合を余事象として考えることによって

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

と求まる。よって、求める確率は、 k 回の試行以内に100 円の少なくとも一方と500 円をもらう確率であるから

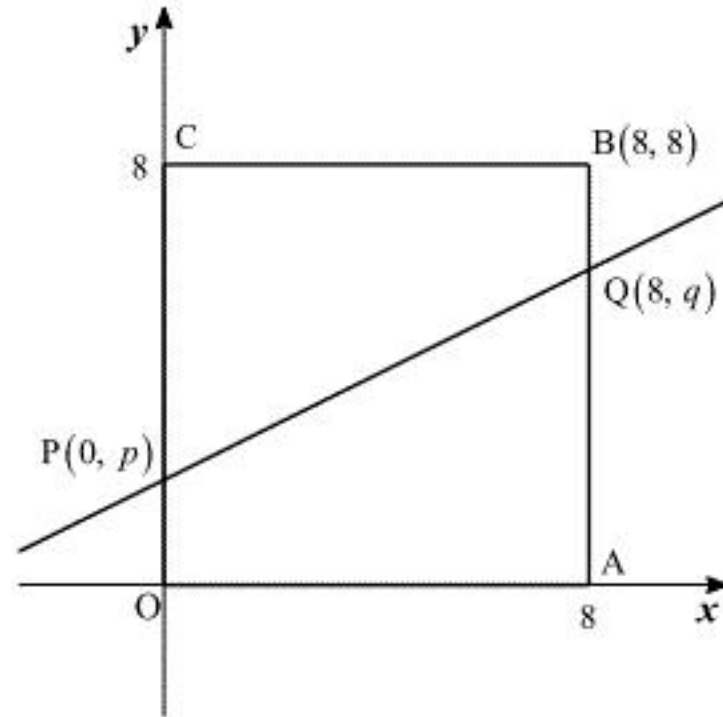
$$\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right\} = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^2 \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

となる。

(答) $\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^2 \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

(1)

直線と辺 OC, AB との交点をそれぞれ P, Q とし, その y 座標をそれぞれ p, q とする。P, Q はそれぞれ辺 OC, AB 上の点であるから, $0 \leq p \leq 8, 0 \leq q \leq 8$ である。このとき, 正方形 OABC および直線 PQ は以下のように図示できる。



四角形 OPQA, 四角形 PQBC の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2} \cdot 8(p+q) = 4(p+q)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8\{(8-p)+(8-q)\} = 4(16-p-q)$$

となる。これらの面積が等しくなるとき

$$4(p+q) = 4(16-p-q)$$

$$\Leftrightarrow p+q=8$$

である。ここで, 直線 PQ の傾きを a とすると直線 PQ は

$$y = ax + p$$

で表される。また,

$$a = \frac{q-p}{8} = \frac{(8-p)-p}{8} = 1 - \frac{p}{4}$$

であり, $0 \leq p \leq 8$ であるから傾き a の取り得る範囲は

$$-1 \leq a \leq 1$$

である。このとき, 直線 PQ の方程式は

$$y = \left(1 - \frac{p}{4}\right)x + p$$

$$\Leftrightarrow y = -p\left(1 - \frac{x}{4}\right) + x$$

と変形でき, これは直線 PQ が定点 $(4, 4)$ を通ることを示している。

(答) 傾き: -1 以上 1 以下, 通る点: $(4, 4)$

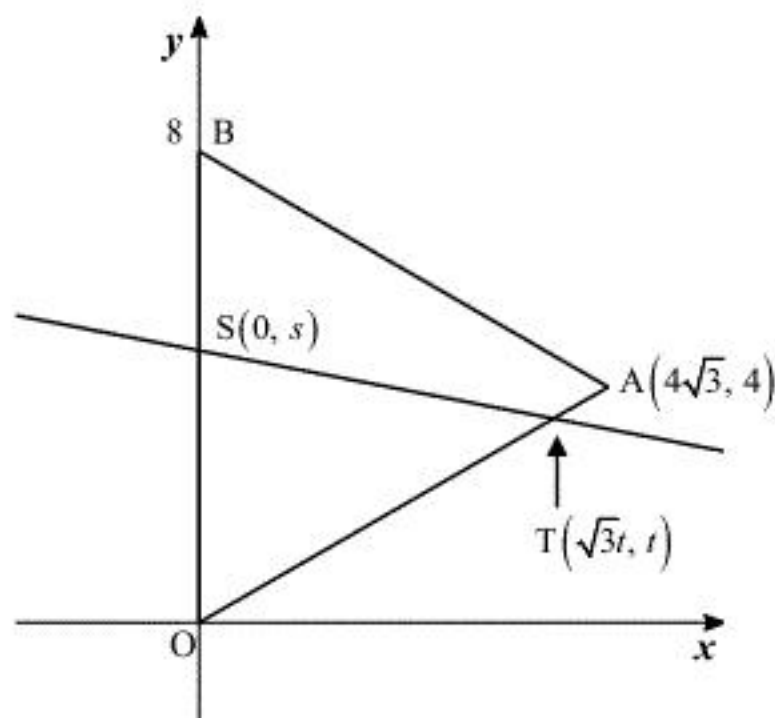
(2)

題意より $A(4\sqrt{3}, 4)$ である。直線と辺 OB, OA との交点を S, T とし, その y 座標をそれぞれ s, t

とおく。S, T はそれぞれ辺 OB, OA 上の点であるから,

$$S(0, s), T(\sqrt{3}t, t) \quad (0 \leq s \leq 8, 0 \leq t \leq 4)$$

と表せる。したがって, 正三角形 OAB と直線 ST は以下のように図示できる。



上図より, 三角形 OAB, 三角形 OST の面積を求めると

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

$$\triangle OST = \frac{1}{2} \cdot OS \cdot OT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot s \cdot 2t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} st$$

である。また, 直線 ST が三角形 OAB の面積を 2 等分するとき

$$\triangle OAB = 2 \triangle OST$$

が成立する。よって,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} st = 16\sqrt{3}$$

$$\therefore st = 16$$

である。これと $0 \leq s \leq 8, 0 \leq t \leq 4$ より, $s \neq 0, t \neq 0$ であり

$$0 < s \leq 8, 0 < t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < s \leq 8, 4 \leq \frac{16}{t}$$

$$\therefore 4 \leq s \leq 8$$

となる。これらより, 三角形 OAB の面積を 2 等分するような直線 ST の方程式は

$$y = \frac{t-s}{\sqrt{3}t}x + s$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{s^2}{16}\right)x + s \quad (4 \leq s \leq 8) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。三角形 OAB において, $0 \leq x \leq 4\sqrt{3}$ であるから, x 座標を $x = X$ ($0 \leq X \leq 4\sqrt{3}$) で固

定したときの, $4 \leq s \leq 8$ における y 座標の取り得る値の範囲を求める。①式に $x = X$ を代入

すると,

$$X=0 \text{ のとき, } y=s$$

$$0 < X \leq 4\sqrt{3} \text{ のとき, } y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{s^2}{16}\right)X + s = -\frac{X}{16\sqrt{3}} \left(s - \frac{8\sqrt{3}}{X}\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{X}$$

となる。 $f(s) = -\frac{X}{16\sqrt{3}} \left(s - \frac{8\sqrt{3}}{X}\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{X}$ ($4 \leq s \leq 8$) とおくと, $y = f(s)$ は軸 $s = \frac{8\sqrt{3}}{X}$, 上

に凸の放物線である。以下, X の値で場合分けをする。

[1] $X=0$ のとき

$y=s$ であり, $4 \leq s \leq 8$ であるから

$$4 \leq y \leq 8$$

である。

[2] $\frac{8\sqrt{3}}{X} \geq 8$ すなわち $0 < X \leq \sqrt{3}$ のとき

$y = f(s)$ は

$s=8$ のとき, 最大値 $f(8) = 8 - \sqrt{3}X$

$s=4$ のとき, 最小値 $f(4) = 4$

をとる。よって

$$4 \leq y \leq 8 - \sqrt{3}X$$

である。

[3] $4 < \frac{8\sqrt{3}}{X} < 8$ すなわち $\sqrt{3} < X < 2\sqrt{3}$ のとき

$y = f(s)$ は

$$s = \frac{8\sqrt{3}}{X} \text{ のとき, 最大値 } f\left(\frac{8\sqrt{3}}{X}\right) = \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{X}$$

をとる。また, 最小値は $f(4) = 4, f(8) = 8 - \sqrt{3}X$ のうち小さい方であり, それを

$\min(4, 8 - \sqrt{3}X)$ と表すと

$$\min(4, 8 - \sqrt{3}X) \leq y \leq \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{X}$$

となる。

[4] $\frac{8\sqrt{3}}{X} \leq 4$ すなわち $X \geq 2\sqrt{3}$ のとき

$y = f(s)$ は

$s=4$ のとき, 最大値 $f(4) = 4$

$s=8$ のとき, 最小値 $f(8) = 8 - \sqrt{3}X$

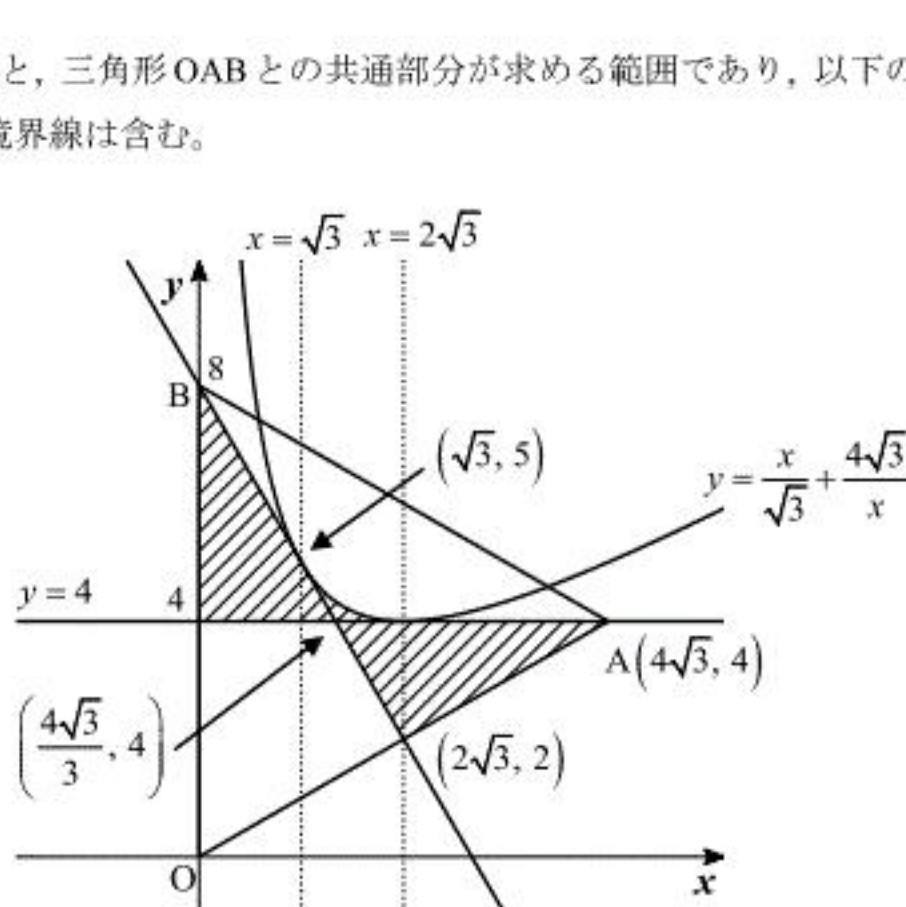
をとる。よって

$$8 - \sqrt{3}X \leq y \leq 4$$

である。

以上[1]から[4]の結果と, 三角形 OAB との共通部分が求める範囲であり, 以下の斜線部のよ

うになる。ただし, 境界線は含む。



(答) 前図