

〔解答〕

問 1	4
問 2	4
問 3	1
問 4	3
問 5	2

〔解説〕

問 1

$$\begin{aligned}(x \otimes (x \oplus x)) - ((x \otimes x) \oplus x) &= (x \otimes (2x+1)) - ((x^2+1) \oplus x) \\ &= (2x^2+x+1) - (x^2+x+2) \\ &= x^2-1\end{aligned}$$

であるから、 $x^2-1=3$ を満たす x は

$$\begin{aligned}x^2 &= 4 \\ \therefore x &= \pm 2\end{aligned}$$

である。

問 2

$$\begin{aligned}A &= x^2 \otimes (x+6) \\ &= x^3+6x^2+1 \\ B &= x \otimes 7 \\ &= 7x+1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}A-B-60 &= (x^3+6x^2+1) - (7x+1) - 60 \\ &= x^3+6x^2-7x-60 \\ &= x^3-27+(6x^2-7x-33) \\ &= x^3-27+(x-3)(6x+11) \\ &= (x-3)(x^2+3x+9)+(x-3)(6x+11) \\ &= (x-3)(x^2+9x+20) \\ &= (x-3)(x+4)(x+5)\end{aligned}$$

となる。

問 3

$$\begin{aligned}C &= x \otimes (x-2) \\ &= x^2-2x+1 \\ &= (x-1)^2 \\ D &= x \oplus 4 \\ &= x+5\end{aligned}$$

であるから、

$$\sqrt{C}-|D|=|x-1|-|x+5|$$

となる。

[1] $x < -5$ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{C}-|D| &= (1-x)-(-x-5) \\ &= 6\end{aligned}$$

である。

[2] $-5 \leq x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{C}-|D| &= (1-x)-(x+5) \\ &= -2x-4\end{aligned}$$

である。

[3] $x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{C}-|D| &= (x-1)-(x+5) \\ &= -6\end{aligned}$$

である。

[1]~[3]より、 $\sqrt{C}-|D|$ は、 $x < -5$ において 6、 $-5 \leq x < 1$ において $-2x-4$ 、 $x \geq 1$ において -6 となる。

問 4

[1] $x < -5$ のとき

問 3 より $f(x)=6+x$ であるから、 $f(x)=0$ を満たす x は

$$x=-6$$

である。(これは $x < -5$ を満たす)

[2] $-5 \leq x < 1$ のとき

問 3 より $f(x)=-x-4$ であるから、 $f(x)=0$ を満たす x は

$$x=-4$$

である。(これは $-5 \leq x < 1$ を満たす)

[3] $x \geq 1$ のとき

問 3 より $f(x)=-6+x$ であるから、 $f(x)=0$ を満たす x は

$$x=6$$

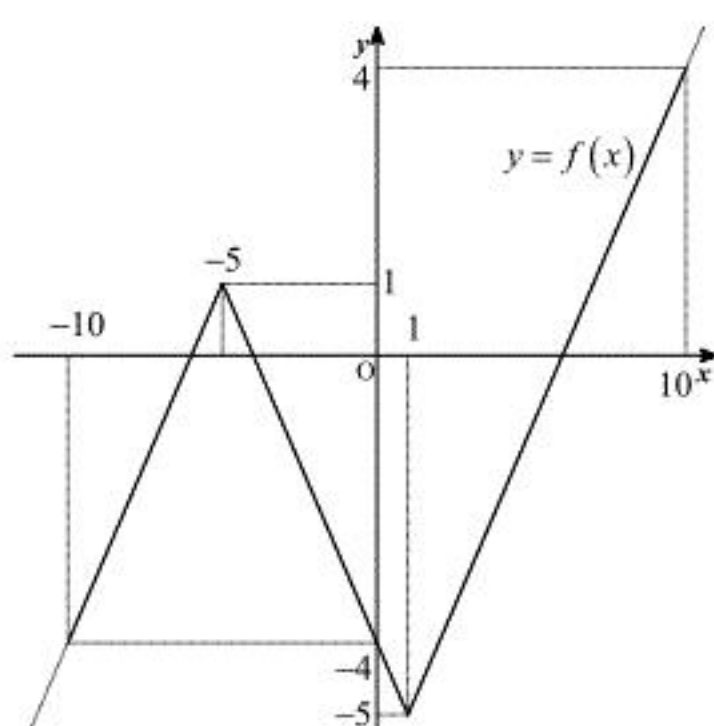
である。(これは $x \geq 1$ を満たす)

以上[1]~[3]より、 $f(x)=0$ の解は 3 個ある。

問 5

$$\begin{aligned}f(-10) &= |-10-1|-|-10+5|-10=-4 \\ f(-5) &= |-5-1|-|-5+5|-5=1 \\ f(1) &= |1-1|-|1+5|+1=-5 \\ f(10) &= |10-1|-|10+5|+10=4\end{aligned}$$

であることと、問 4 より $y=f(x)$ ($-10 \leq x \leq 10$) のグラフは下図の実線部分である。



よって、上図より $-10 \leq x \leq 10$ における $f(x)$ の最大値 a 、最小値 b はそれぞれ、

$$a=f(10)=4, b=f(1)=-5$$

となり、

$$a+b=-1$$

と求められる。

〔解答〕

問 6	3
問 7	1
問 8	2
問 9	2
問 10	3

〔解説〕

問 6

放物線 C_1 の式は

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x - 5 \\ &= -(x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

となるから C_1 の頂点は $(3, 4)$ である。

問 7

 C_2 は C_1 を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動させたものであるから、 C_2 の式は

$$y - q = -(x - p)^2 + 6(x - p) - 5$$

と表せる。いま、 C_2 が 2 点 $(2, 5)$ 、 $(4, -7)$ を通るから、

$$\begin{cases} 5 - q = -(2 - p)^2 + 6(2 - p) - 5 \\ -7 - q = -(4 - p)^2 + 6(4 - p) - 5 \end{cases}$$

となる。これを整理して、

$$\begin{cases} p^2 + 2p - q + 2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ p^2 - 2p - q - 10 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② より、

$$\begin{aligned} 4p + 12 &= 0 \\ \therefore p &= -3 \end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、

$$\begin{aligned} 9 - 6 - q + 2 &= 0 \\ \therefore q &= 5 \end{aligned}$$

と求まる。

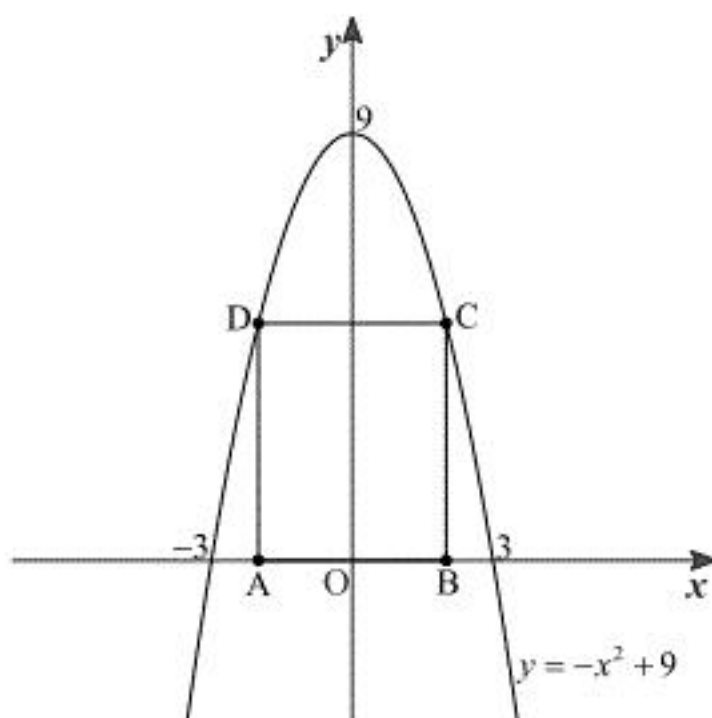
問 8

 C_1 の頂点を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ移動した点が C_2 の頂点であるから、求める距離は、問 7 より、

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

と求められる。

問 9

 C_2 と長方形 ABCD の概形は下図のようになる。ここで、 $B(t, 0)$ ($0 < t < 3$) とすると、 $A(-t, 0)$ 、 $C(t, -t^2 + 9)$ 、 $D(-t, -t^2 + 9)$ と表せる。このとき、

長方形 ABCD の周囲の長さは

$$\begin{aligned} 2\{2t + (-t^2 + 9)\} &= 2(-t^2 + 2t + 9) \\ &= -2(t-1)^2 + 20 \end{aligned}$$

と表せる。 $0 < t < 3$ より長方形 ABCD の周囲の長さは $t=1$ のとき最大値 20 をとる。

問 10

問 9 より $t=1$ のとき ABCD は辺の長さが縦 8、横 2 の長方形となるから、その面積は

$$8 \cdot 2 = 16$$

となる。

〔解答〕

問 11	2
問 12	3
問 13	1
問 14	1
問 15	3

〔解説〕

[1]

問 11

サイコロの6つの目が出る確率は同様に確からしい。いま、サイコロを4回振って玉が点 $(4, 0)$ にあるとき、1, 2, 3の目が4回連続で出ればよいから、求める確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

と求まる。

問 12

サイコロを4回振って玉が点 $(0, 0)$ にあるとき、 x 方向にそれぞれ ± 2 ずつ動けばよい。4回のうち、何回目に正の方向に動くかの場合の数は

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 \cdot 6 = \frac{3}{8}$$

と求まる。

[2]

問 13

サイコロを4回振って玉が点 $(0, 0)$ にあるとき、以下の場合が考えられる。

[1] x 方向にそれぞれ ± 1 ずつ、 y 方向にそれぞれ ± 1 ずつ動く場合

何回目にどの方向に動くかの場合の数は

$$4! = 24 \text{ (通り)}$$

であるから、このときの確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 24 = \frac{2}{27}$$

である。

[2] x 方向にそれぞれ ± 2 ずつ動く場合

何回目にどの方向に動くかの場合の数は

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

であるから、このときの確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot 6 = \frac{2}{27}$$

である。

[3] y 方向にそれぞれ ± 2 ずつ動く場合

何回目にどの方向に動くかの場合の数は

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

であるから、このときの確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 6 = \frac{1}{216}$$

である。

以上[1]~[3]より求める確率は

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{216} = \frac{11}{72}$$

となる。

[3]

問 14

サイコロを4回振って玉が点 $(0, 0)$ にあるとき、1, 2の目が2回、3, 4の目が2回出ればよい。

何回目にどの方向に動くかの場合の数は

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot 6 = \frac{2}{27}$$

である。

問 15

サイコロを5回振って玉が点 $(0, 0)$ にあるとき、5の目が1回、1, 2の目が1回、3, 4の目が2回、6の目が1回出ればよい。何回目にどの方向に動くかの場合の数は

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 = 60 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot 60 = \frac{5}{81}$$

である。

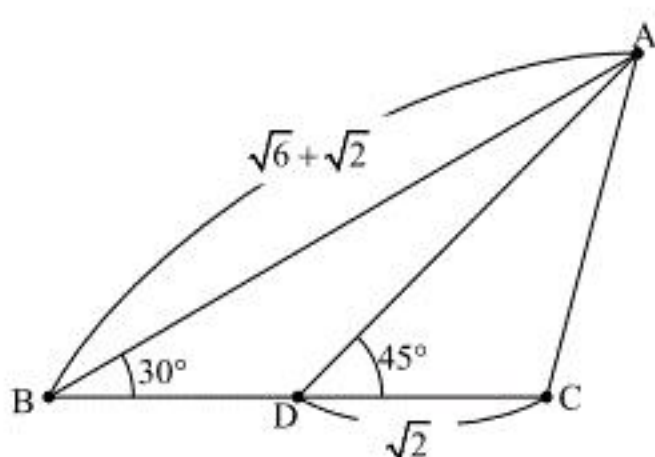
〔解答〕

問 16	4
問 17	4
問 18	2
問 19	3
問 20	5

〔解説〕

問 16

三角形 ABC および点 D は下図のようになる。



$$\begin{aligned}\angle ADB &= 180^\circ - \angle ADC \\ &= 180^\circ - 45^\circ \\ &= 135^\circ\end{aligned}$$

である。ここで、三角形 ABD について正弦定理より

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \Leftrightarrow \frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}AD &= \frac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{3} + 1\end{aligned}$$

となる。

問 17

三角形 ACD について余弦定理より

$$\begin{aligned}AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos 45^\circ \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 + 2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。よって、 $AC > 0$ より

$$AC = 2$$

と求まる。

問 18

三角形 ACD について正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle CAD} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\sin \angle CAD &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\angle CAD &< 180^\circ - \angle ADC \\ &= 180^\circ - 45^\circ \\ &= 135^\circ\end{aligned}$$

を考慮すると、

$$\angle CAD = 30^\circ$$

と求まる。

問 19

半角公式より

$$\begin{aligned}\cos^2 15^\circ &= \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} \\ &= \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2\end{aligned}$$

である。 $\cos 15^\circ > 0$ より、

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

と求まる。

問 20

$$\begin{aligned}\angle BAD &= \angle ADC - \angle ABC \\ &= 45^\circ - 30^\circ \\ &= 15^\circ\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle BAD + \angle CAD \\ &= 15^\circ + 30^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

となるので、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{3} + 1\end{aligned}$$

と求まる。