

試験問題(記述式) — 数 学

(注意) 解答はすべて別紙解答用紙の定められた欄に書くこと。

1 以下の間に答えよ。

- (1) 三角形 ABC において、 $BC = a$, $AB = c$, $a \cos A = c \cos C$ であるとする。このとき、 ABC はどのような三角形か。
- (2) 座標平面上に放物線 $C: y = x^2 - 2x - 3$, 直線 l_1, l_2 がある。 l_1, l_2 は点 $P_1(-1, 0)$ を通るものとし、 C と l_1 の交点のうち P_1 ではない方を P_2 , C と l_2 の交点のうち P_1 ではない方を P_3 とする。線分 P_1P_3 と C で囲まれる図形の面積が線分 P_1P_2 と C で囲まれる図形の面積の 8 倍で、 P_3 の x 座標から P_2 の x 座標を引いた値が 5 のとき、 P_3 の y 座標は P_2 の y 座標の何倍か。
- (3) 平面上にある n 個の円は、どの円も他のすべての円と 2 つの交点を持ち、3 つ以上の円は 1 点で交わらないように描かれているものとする。このとき、すべての交点の数を a_n とする。 $a_p - a_q = 140$, $p - q = 4$ であるとき、 p はいくらか。

2 以下の間に答えよ。

- (1) 多項式 $f(x) = (x - \sqrt{c})^{2n+1} (x + \sqrt{c})^{2n} (x^2 + c)^{2n}$ の x^k の係数を a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, 8n+1$) とする。ここで n は自然数, c は正の実数とする。このとき、以下の間に答えよ。
 - (i) $c = 4$ のとき、 $\sum_{k=1}^{8n+1} a_k$ はいくらか。
 - (ii) $c = 2$, $n = 17$ のとき、 a_k が最大となる k はいくらか。
- (2) 長さ 1 km の区間を車が定速で走行するものとする。1 回目の走行では速度 c km/h, 2 回目の走行では速度 $2c$ km/h, 3 回目の走行では速度 $3c$ km/h と c km/h ずつ速度を上げていき、この区間を $2n$ 回走行する。ここで、 n は自然数, c は正の定数である。1 回目から n 回目までの走行にかかる時間の総和を S_1 (時間), $n+1$ 回目から $2n$ 回目までの走行にかかる時間の総和を S_2 (時間), 奇数回目の走行にかかる時間の総和を S_o (時間), 偶数回目の走行にかかる時間の総和を S_e (時間) とする。このとき、以下の間に答えよ。
 - (i) $S_o - S_e$ を S_2 の関数で表せ。
 - (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_o - S_e) = 1$ となる c はいくらか。

3 500円, 100円, 50円の硬貨が1枚ずつある。1回目の試行で3枚の硬貨を投げ, 表が出た硬貨をもらうことができる。2回目の試行では, 残った硬貨を投げ, やはり表が出た硬貨をもらうことができる。3回目以降も同様とし, この試行を繰り返し, もらえる金額が600円以上になったらこの試行は終了するものとする。このとき, 以下の間に答えよ。

- (1) 1回目の試行で終わる確率, 2回目の試行で終わる確率はそれぞれいくらか。
- (2) k 回の試行以内で終わる確率を k の関数として表せ ($k = 1, 2, 3, \dots$)。
- (3) 上記の50円硬貨を100円硬貨に入れ替える。すなわち500円硬貨が1枚, 100円硬貨が2枚あるときに, 上記の試行を行う。このとき, k 回の試行以内で終わる確率を k の関数として表せ。

4 以下の間に答えよ。

- (1) 座標平面上に1辺の長さが8の正方形OABCを作る。Oは原点, Aは(8, 0), Cは(0, 8)とする。ある直線が辺OCとAB上を通り, OABCの面積を2等分するとき, この直線の傾きが取り得る範囲を求めよ。また, この条件を満たす直線が必ず通る点があれば, その座標を求めよ。
- (2) 座標平面上に1辺の長さが8の正三角形OABを作る。Oは原点, Bは(0, 8), Aは第1象限にあるものとする。ある直線が辺OAとOB上を通り, $\triangle OAB$ の面積を2等分するとき, この直線が $\triangle OAB$ 上に取り得る範囲を図示せよ。

