

〔解答〕

(4)

〔解説〕

等式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 (2xy+4x+y+2)(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= z+24\sqrt{6} \\
 \Leftrightarrow (2xy+4x+y+2)(5+2\sqrt{6}) &= z+24\sqrt{6} \\
 \Leftrightarrow \{5(2xy+4x+y+2)-z\} + \{2(2xy+4x+y+2)-24\}\sqrt{6} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。 x, y, z はそれぞれ自然数であるから、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 5(2xy+4x+y+2)-z=0 \\ 2(2xy+4x+y+2)-24=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z=5(2xy+4x+y+2) \\ 2xy+4x+y+2=12 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z=60 \\ 2xy+4x+y+2=12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、等式 $2xy+4x+y+2=12$ を整理すると、

$$\begin{aligned}
 2xy+4x+y+2 &= 12 \\
 \Leftrightarrow (2x+1)(y+2) &= 12
 \end{aligned}$$

となる。 x, y がそれぞれ自然数で $2x+1$ が奇数であることを考慮すると、この等式を満たす x, y は

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 2x+1=3 \\ y+2=4 \end{cases} \\
 &\therefore x=1, y=2
 \end{aligned}$$

に限られる。以上より、自然数 x, y, z の和は、

$$x+y+z=1+2+60=63$$

である。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

x は自然数であり, $f_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{f_n(x)}$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) であるから, $1 \leq k \leq 6$ を

満たす任意の自然数 k について, $f_k(x) > 0$ である。したがって, $f_6(x) \leq 1.624$ のとき,

$$f_6(x) \leq 1.624$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{f_5(x)} \leq 1.624$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f_5(x)} \leq 0.624$$

$$\Leftrightarrow f_5(x) \geq \frac{1}{0.624} \quad (\because f_5(x) > 0)$$

$$\Leftrightarrow f_5(x) \geq \frac{1000}{624} = \frac{125}{78}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{f_4(x)} \geq \frac{125}{78}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f_4(x)} \geq \frac{47}{78}$$

$$\Leftrightarrow f_4(x) \leq \frac{78}{47} \quad (\because f_4(x) > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{f_3(x)} \leq \frac{78}{47}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f_3(x)} \leq \frac{31}{47}$$

$$\Leftrightarrow f_3(x) \geq \frac{47}{31} \quad (\because f_3(x) > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{f_2(x)} \geq \frac{47}{31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f_2(x)} \geq \frac{16}{31}$$

$$\Leftrightarrow f_2(x) \leq \frac{31}{16} \quad (\because f_2(x) > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{f_1(x)} \leq \frac{31}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f_1(x)} \leq \frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) \geq \frac{16}{15} \quad (\because f_1(x) > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} \geq \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 15 \quad (\because x > 0)$$

と変形できるから, $f_6(x) \leq 1.624$ となる自然数 x は 15 個存在する。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

△ABCについて余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}
 \cos \angle A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} \\
 &= \frac{4a^2 + 36 - 3a^2}{2 \cdot 2a \cdot 6} \\
 &= \frac{a^2 + 36}{24a} \\
 &= \frac{a}{24} + \frac{3}{2a}
 \end{aligned}$$

とわかる。ここで、 $\frac{a}{24} > 0$, $\frac{3}{2a} > 0$ より相加・相乗平均の関係を利用すると、

$$\frac{1}{24}a + \frac{3}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{24} \cdot \frac{3}{2a}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

が成り立つから、 $\cos \angle A$ は

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{24} &= \frac{3}{2a} \\
 \therefore a &= 6 \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

のときに、最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned}
 |\cos \angle A| &= \frac{6}{24} + \frac{3}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} \\
 \therefore |\cos \angle A| &< 1
 \end{aligned}$$

であるから、△ABCは存在する。また、 $0^\circ < \angle A < 180^\circ$ であるから、 $\angle A$ が最大になることは、 $\cos \angle A$ が最小になることと同値である。したがって、求めるべき a の値は $a = 6$ である。

〔解答〕

(4)

〔解説〕

二等辺三角形のうち、正三角形であるものの個数は、12個の頂点のうち、3個の頂点の選び方を考えて、

$$12 \div 3 = 4 \text{ (個)}$$

である。また、二等辺三角形のうち正三角形ではないものについて考えると、等しい2辺の交点が円周上の任意の点Aであるような二等辺三角形は、点A以外の三角形の頂点のうち、片方の選び方に注目すると、

$$(12 - 2 - 2) \div 2 = 4 \text{ (個)}$$

あるから、正三角形でない二等辺三角形は、点Aの選び方が12通り存在するから、

$$4 \times 12 = 48 \text{ (個)}$$

存在する。以上より、求める数は

$$4 + 48 = 52 \text{ (個)}$$

である。

〔解答〕

(2)

〔解説〕

白玉を取り出す事象を X 、A の袋を選ぶ事象を A とすると、 $P(X)$ 、 $P(X \cap A)$ の値はそれぞれ、

$$P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{12}$$

$$P(X \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{12}$$

であるから、取り出した球が白球であったとき、選んだ袋が A である条件付き確率は、

$$P_X(A) = \frac{P(X \cap A)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

である。

〔解答〕

(4)

〔解説〕

 $A = 3^a, B = 2^b$ とおくと,

$$\begin{cases} 3^{a+1} - 2^{b+1} = 7 \\ 3^a 2^b = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A - 2B = 7 \\ AB = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{3}{2}A - \frac{7}{2} & \dots \textcircled{1} \\ AB = 24 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

と変形できる。①を②に代入すると,

$$A\left(\frac{3}{2}A - \frac{7}{2}\right) = 24$$

$$\Leftrightarrow 3A^2 - 7A - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3A - 16)(A + 3) = 0$$

と変形でき、 $A = 3^a > 0$ であるから、 $A = \frac{16}{3}$ である。したがって、

$$a = \log_3 A$$

$$= \log_3 \frac{16}{3}$$

$$= \log_3 16 - \log_3 3$$

$$= 4\log_3 2 - 1$$

である。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

 $f(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6x^2 - 18kx + 12k^2 \\
 &= 6(x^2 - 3kx + 2k^2) \\
 &= 6(x - k)(x - 2k)
 \end{aligned}$$

である。 $k > 0$ より, 増減表は以下のようになる。

x	...	k	...	$2k$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(k)$	↘	$f(2k)$	↗

よって, $a = k, b = 2k$ であるから,

$$\begin{aligned}
 f(a) - f(b) &= f(k) - f(2k) \\
 &= (2k^3 - 9k^3 + 12k^3 + 1) - (16k^3 - 36k^3 + 24k^3 + 1) \\
 &= (5k^3 + 1) - (4k^3 + 1) \\
 &= k^3
 \end{aligned}$$

である。これが 27 に一致するから,

$$k^3 = 27$$

$$\therefore k = 3$$

となる。したがって,

$$b - a = 2k - k = k = 3$$

である。

〔解答〕

(4)

〔解説〕

 kx は定数である。以下、 kx の値によって場合分けする。[1] $kx \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ のとき $kx \leq 0 \leq a$ より $a - kx \geq 0$ であるから、 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 |a - kx| da \\
 &= \int_0^1 (a - kx) da \\
 &= \left[\frac{1}{2} a^2 - kxa \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - kx
 \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 < kx < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{k}$ のとき

$$a - kx \begin{cases} \geq 0 & (kx \leq a \leq 1) \\ \leq 0 & (0 \leq a \leq kx) \end{cases}$$

であるから、 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 |a - kx| da \\
 &= -\int_0^{kx} (a - kx) da + \int_{kx}^1 (a - kx) da \\
 &= -\left[\frac{1}{2} a^2 - kxa \right]_0^{kx} + \left[\frac{1}{2} a^2 - kxa \right]_{kx}^1 \\
 &= -\frac{1}{2} (kx)^2 + (kx)^2 + \frac{1}{2} - kx - \frac{1}{2} (kx)^2 + (kx)^2 \\
 &= (kx)^2 - kx + \frac{1}{2} \\
 &= \left\{ (kx) - \frac{1}{2} \right\}^2 + \frac{1}{4} \\
 &= k^2 \left(x - \frac{1}{2k} \right)^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

[3] $kx \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{k}$ のとき $kx \geq 1 \geq a$ より $a - kx \leq 0$ であるから、 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 |a - kx| da \\
 &= -\int_0^1 (a - kx) da \\
 &= -\left[\frac{1}{2} a^2 - kxa \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2} + kx
 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	0	...	$\frac{1}{2k}$	...	$\frac{1}{k}$	...
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

上の表より、 $f(x)$ を最小にする実数 x は、 $x = \frac{1}{2k}$ である。

〔解答〕

(2)

〔解説〕

 $n \geq 2$ について,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
 &= n^2 - 2n - \left\{ (n-1)^2 - 2(n-1) \right\} \\
 &= 2n - 3
 \end{aligned}$$

である。また,

$$a_1 = \sum_{k=1}^1 a_k = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 = 2 \cdot 1 - 3$$

であるから, $a_n = 2n - 3$ はすべての自然数 n について成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{31} &= \sum_{k=1}^{16} a_{2k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{16} \{2(2k-1) - 3\} \\
 &= \sum_{k=1}^{16} (4k - 5) \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 17 - 5 \cdot 16 \\
 &= 464
 \end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

A, B, C の座標より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} &= (-2-1, -4-1, 3-(-1)) \\ &= (-3, -5, 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= (8-1, 6-1, -2-(-1)) \\ &= (7, 5, -1)\end{aligned}$$

であるから,

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (-3)^2 + (-5)^2 + 4^2 = 50$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = 7^2 + 5^2 + (-1)^2 = 75$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= (-3) \cdot 7 + (-5) \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \\ &= -21 - 25 - 4 \\ &= -50\end{aligned}$$

である。したがって、平行四辺形 ABCD の面積 S は,

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 |\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2} \\ &= \sqrt{50 \cdot 75 - (-50)^2} \\ &= \sqrt{1250} \\ &= 25\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

(5)

〔解説〕

ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}
 z^n &= (1 - \sqrt{3}i)^n \\
 &= \left[2 \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} \right]^n \\
 &= 2^n \left\{ \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \right\} \\
 &= 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

である。したがって、 z^n が実数となるのは、虚部 $-\sin \frac{n\pi}{3}$ が0となるときであり、これを満た

す最小の自然数 n は、 $n=3$ である。

[解答]

(3)

[解説]

実数 x, y が $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$ を満たすとき、実数 θ を用いて、 $x = \sqrt{13} \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ とおける。し

たがって、 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$ を満たす実数 α を用いて $2x + y$ を変形すると、

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2\sqrt{13} \cos \theta + 2 \sin \theta \\ &= 2\sqrt{14} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \sin \theta + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} \cos \theta \right) \\ &= 2\sqrt{14} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

と表せる。よって $2x + y$ の最大値は $2\sqrt{14}$ である。

〔解答〕

(2)

〔解説〕

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}) = \sqrt{2 \cdot 1 + 1} - \sqrt{1+2} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$ が有限の値をとるとき、 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}-3) = 0$ がいえるから、

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a}-3=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a}=3$$

$$\Leftrightarrow 1+a=9$$

$$\therefore a=8$$

である。これを $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$ に代入したうえで整理すると、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{(x+8)-9\}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{\{(2x+1)-(x+2)\}(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+8}+3} \\ &= \frac{\sqrt{2 \cdot 1 + 1} + \sqrt{1 + 2}}{\sqrt{1 + 8} + 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

(2)

〔解説〕

 $f(x)$ を 2 回微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cos 2x + e^x (\cos 2x)' \\ &= e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^x)' \cos 2x + e^x (\cos 2x)' - 2 \left\{ (e^x)' \sin 2x + e^x (\sin 2x)' \right\} \\ &= e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x - 2e^x \sin 2x - 4e^x \cos 2x \\ &= -4e^x \sin 2x - 3e^x \cos 2x \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 α を用いて,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4e^x \sin 2x - 3e^x \cos 2x \\ &= -5e^x \left(\frac{4}{5} \sin 2x + \frac{3}{5} \cos 2x \right) \\ &= -5e^x \sin(2x + \alpha) \end{aligned}$$

と表せる。これと $f''(x) = ae^x \sin(2x + b)$ を比較すると、 $a = -5$, $b = \alpha$ であるとわかるから,

$$a \sin b = -5 \sin \alpha = -5 \cdot \frac{3}{5} = -3$$

と求まる。

〔解答〕

(3)

〔解説〕

$t = \sin \theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ より $dt = \cos \theta d\theta$ である。また, θ と t のとりうる範囲は, 下の表のようになる。

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\rightarrow$	1

以上より, 与えられた定積分を t を用いて整理すると,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta \sin^3 \theta - \cos^3 \theta \sin^3 \theta + \cos \theta \sin^7 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos \theta \sin^3 \theta - \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) \sin^3 \theta + \cos \theta \sin^7 \theta \right\} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\sin^3 \theta - \sin^3 \theta + \sin^5 \theta + \sin^7 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^1 (t^5 + t^7) dt \\
 &= \left[\frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{8} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{7}{24}
 \end{aligned}$$

と求まる。