

I

(1)

$f(x)=x^2+|2x-a|-a$ とおく。まず、 $f(x)$ を絶対値の中の式の正負で場合分けして考える。

[1] $2x-a<0(\Leftrightarrow x<\frac{a}{2})$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - (2x - a) - a \\ &= x^2 - 2x \\ &= (x-1)^2 - 1\end{aligned}$$

である。

[2] $2x-a\geq 0(\Leftrightarrow x\geq \frac{a}{2})$ のとき

このとき、

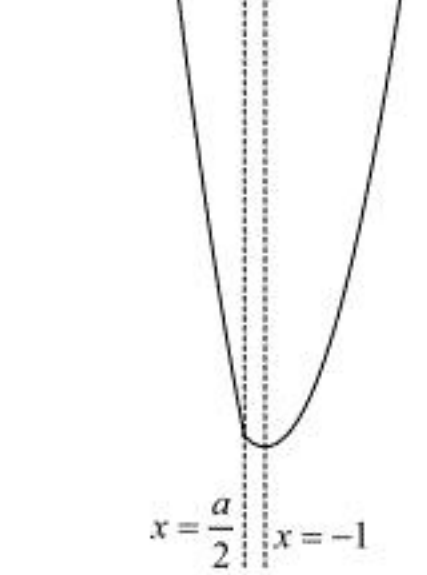
$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + (2x - a) - a \\ &= x^2 + 2x - 2a \\ &= (x+1)^2 - 2a - 1\end{aligned}$$

である。

次に、 $g(x)=(x-1)^2-1$ 、 $h(x)=(x+1)^2-2a-1$ とおき、 $f(x)$ の概形を、 a の値で場合分けして考える。

[i] $\frac{a}{2}\leq -1(\Leftrightarrow a\leq -2)$ のとき

このとき、 $f(x)$ の概形は下図のようになる。



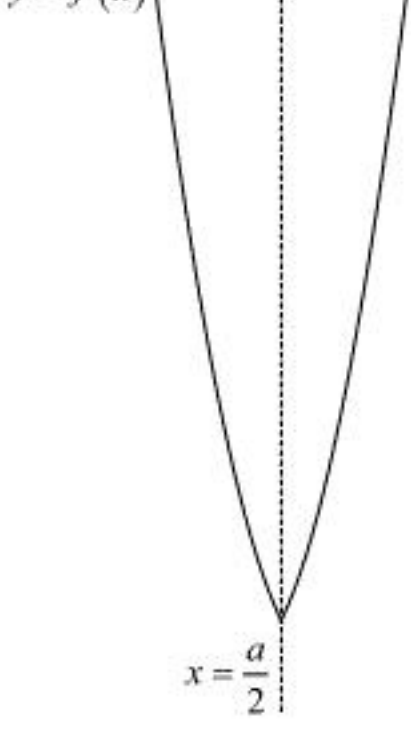
上図より、 $f(x)$ は $x=-1$ で最小値をとるから、求める条件は

$$\begin{aligned}f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow h(-1) &> 0 \\ \Leftrightarrow -2a - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。これと $a\leq -2$ を合わせると、 a の範囲は $a\leq -2$ となる。

[ii] $-1<\frac{a}{2}<1(\Leftrightarrow -2<a<2)$ のとき

このとき、 $f(x)$ の概形は下図のようになる。



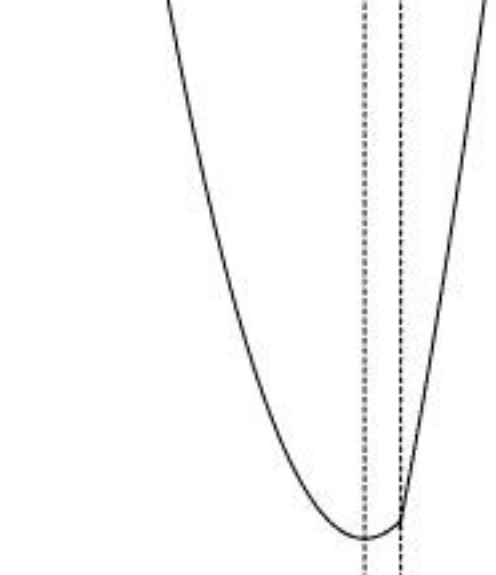
上図より、 $f(x)$ は $x=\frac{a}{2}$ で最小値をとるから、求める条件は

$$\begin{aligned}f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow g\left(\frac{a}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - a &> 0 \\ \Leftrightarrow a(a-4) &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< 0, 4 < a\end{aligned}$$

である。これと $-2<a<2$ を合わせると、 a の範囲は $-2<a<0$ となる。

[iii] $1\leq \frac{a}{2}(\Leftrightarrow a\geq 2)$ のとき

このとき、 $f(x)$ の概形は下図のようになる。



上図より、 $f(x)$ は $x=1$ で最小値をとるから、求める条件は

$$\begin{aligned}f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow g(1) &> 0 \\ \Leftrightarrow -1 &> 0\end{aligned}$$

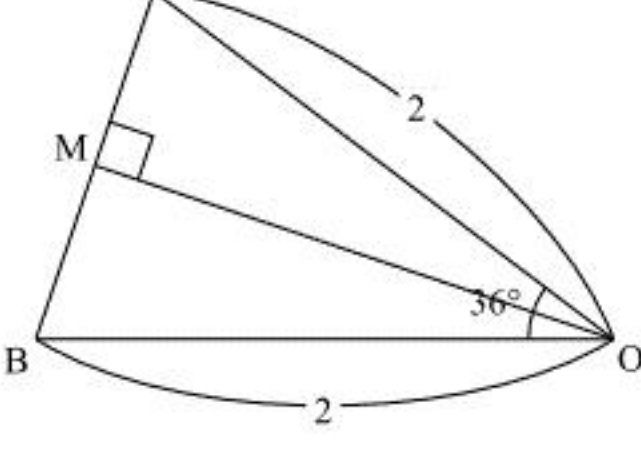
となるが、この不等式は成立しえないので不適である。

以上[i], [ii], [iii]より、題意を満たす実数 a の範囲は、 $a<0$ である。

(答) $a<0$

(2)

正十角形の隣り合う任意の2頂点をA、Bとすると、三角形OABの概形は下図のようになる。



ここで、ABの中点をMとすると、 $\angle AMO$ は直角であり、 $\angle AOM=\angle BOM=18^\circ$ であるから、 $AB=2\cdot 2\sin 18^\circ=4\sin 18^\circ$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ &= \sin(90^\circ - 36^\circ) \\ \Leftrightarrow \cos 36^\circ &= \sin 54^\circ\end{aligned}$$

であるから、 $x=18^\circ$ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \sin 3x \\ \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x - 1)(4\sin^2 x + 2\sin x - 1) &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sin x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

となるが、 $0<\sin x<1$ であるから、 $\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ である。以上より、正十角形の一辺の長さ、すなわちABの長さは、

$$AB=4\sin 18^\circ=4\cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4}=-1+\sqrt{5}$$

である。

(答) $-1+\sqrt{5}$

(3)

自然数 a, b について、 $X=2^a 3^b$ 、 $Y=5400=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$ であり、 X と Y の最小公倍数は

$16200=2^3\cdot 3^4\cdot 5^2$ であるから、 $X=2^a\cdot 3^4(a=1, 2, 3)$ である。ここで、 $X^n=(2^a\cdot 3^4)^n=2^{an}\cdot 3^{4n}$ の

約数が221個であるから、

$$(an+1)(4n+1)=221=13\cdot 17$$

と表せる。 $an+1, 4n+1$ がともに1より大きい自然数であるから、

$$(an+1, 4n+1)=(13, 17), (17, 13)$$

である。 $(an+1, 4n+1)=(13, 17)$ のとき、 $(a, n)=(3, 4)$ である。一方、 $(an+1, 4n+1)=(17, 13)$ のとき、 $(a, n)=\left(\frac{16}{3}, 3\right)$ となり、 a が自然数とならないため不適である。以上より、

$a=3, b=4, n=4$ であるから、

$$a+b+n=3+4+4=11$$

となる。

(答) 11

(4)

原点をOとすると、Oは円 $x^2+y^2=1$ の中心である。このとき、 $\triangle OPQ$ は $OP=OQ=1$ 、 $PQ=\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形であるから、

$$P(\cos \theta, \sin \theta), Q\left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とおいても一般性を失わない。ここで、

$$\begin{aligned}\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \theta \\ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta\end{aligned}$$

であるから、 $Q(-\sin \theta, \cos \theta)$ と表せる。したがって、

$$\overline{RP}=(\cos \theta - 2, \sin \theta - 3), \overline{RQ}=(-\sin \theta - 2, \cos \theta - 3)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overline{RP}\cdot \overline{RQ} &= (\cos \theta - 2)(-\sin \theta - 2) + (\sin \theta - 3)(\cos \theta - 3) \\ &= -5\cos \theta - \sin \theta + 13\end{aligned}$$

である。ここで、 $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ 、 $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$ となるような実数 α を用いると、

$$\begin{aligned}\overline{RP}\cdot \overline{RQ} &= -5\cos \theta - \sin \theta + 13 \\ &= \sqrt{26}(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) + 13 \\ &= \sqrt{26}\sin(\theta + \alpha) + 13\end{aligned}$$

と表せ、 $\theta + \alpha$ は任意の実数を取りうるから、 $\overline{RP}\cdot \overline{RQ}$ の最小値は、

$$\sqrt{26}\cdot (-1) + 13 = -\sqrt{26} + 13$$

である。

(答) $-\sqrt{26}+13$

(1)

$\triangle OAB$ が球の内部にあることは、3点O, A, Bがすべて球の内部にあることと同値である。

与えられた球の方程式を整理すると、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - 4ax - 2y + az - 16a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2a)^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{17}{4}a^2 + 16a + 5\end{aligned}$$

であり、任意の $a(>0)$ に対して $\frac{17}{4}a^2 + 16a + 5 > 0$ であるから、与えられた方程式は常に球を表す。

点 (x, y, z) が球の内部にあることは、 x, y, z が

$$\begin{aligned}(x-2a)^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 &< \frac{17}{4}a^2 + 16a + 5 \\ \Leftrightarrow (x-2a)^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}a^2 - 16a - 5 &< 0\end{aligned}$$

を満たすことと同値である。 $f(x, y, z) = (x-2a)^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}a^2 - 16a - 5$ とおくと、

点Oが球 $f(x, y, z) = 0$ の内部にあるとき、

$$\begin{aligned}f(0, 0, 0) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 1 + \frac{a^2}{4} - \frac{17}{4}a^2 - 16a - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow 16a + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるから、任意の正の実数 a について、点Oは球 $f(x, y, z) = 0$ の内部にある。点Aが球

$f(x, y, z) = 0$ の内部にあるとき、

$$\begin{aligned}f(1, 3, 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 + 4 + \frac{a^2}{4} + 2a + 4 - \frac{17}{4}a^2 - 16a - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow 18a - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> \frac{2}{9}\end{aligned}$$

である。点Bが球 $f(x, y, z) = 0$ の内部にあるとき、

$$\begin{aligned}f(-2, 1, 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 8a + 4 + 0 + \frac{a^2}{4} + 2a + 4 - \frac{17}{4}a^2 - 16a - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow 6a - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。以上より、 $\triangle OAB$ が球の内部にあるような a の範囲は、 $a > \frac{1}{2}$ である。

(答) $a > \frac{1}{2}$

(2)

(1)より、任意の正の実数 a について、Oは球の内部にある。球面上に存在する辺AB上の点を

Cとすると、 $\overline{OC}$ は $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t を用いて、

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + t\overline{AB} \\ &= (1-3t, 3-2t, 2)\end{aligned}$$

と表せるから、 $C(1-3t, 3-2t, 2)$ である。Cは球面上に存在するから、

$$\begin{aligned}f(1-3t, 3-2t, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-3t-2a)^2 + (2-2t)^2 + \left(2 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}a^2 - 16a - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 13t^2 + (12a-14)t - 18a + 4 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、等式①を満たす t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲にただ一つ存在するような a

の範囲を求めればよい。以下、 $g(t) = 13t^2 + (12a-14)t - 18a + 4$ 、方程式 $g(t) = 0$ の判別式を D

とし、2つのグラフ $y = g(t)$ と $y = 0$ ($0 \leq t \leq 1$)の交わり方によって場合分けする。

[1] $D > 0$ であり、2つのグラフが、 $0 < t < 1$ の範囲でただ1点と共有点を持つ場合

このとき、

$$\begin{aligned}g(0) \cdot g(1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (-18a+4)(-6a+3) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{9} &< a < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。

[2] $D = 0$ であり、2つのグラフが、 $0 < t < 1$ の範囲でただ1点と共有点を持つ場合

このとき、

$$\begin{aligned}D &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (6a-7)^2 - 13(-18a+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 36a^2 + 150a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 12a^2 + 50a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{-25 \pm 7\sqrt{13}}{12}\end{aligned}$$

となるが、 $a > 0$ であるから、 $a = \frac{-25+7\sqrt{13}}{12}$ となる。このとき、共有点の t 座標は

$t = \frac{-6a+7}{13}$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{-6a+7}{13} &= \frac{-6 \cdot \frac{-25+7\sqrt{13}}{12} + 7}{13} \\ &= \frac{1}{13} \left(\frac{25-7\sqrt{13}}{2} + 7 \right) \\ &= \frac{1}{13} \cdot \frac{39-7\sqrt{13}}{2} \\ &= \frac{39-7\sqrt{13}}{26}\end{aligned}$$

である。ここで、 $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$ であるから、

$$\begin{aligned}3 &< \sqrt{13} < 4 \\ \Leftrightarrow -28 &< -7\sqrt{13} < -21 \\ \Leftrightarrow 11 &< 39-7\sqrt{13} < 18 \\ \therefore 0 &< \frac{11}{26} < \frac{39-7\sqrt{13}}{26} < \frac{18}{26} < 1\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、共有点の t 座標は $0 \leq t \leq 1$ の範囲にあるから、題意を満たす。

[3] 2つのグラフが、 $t = 0$ または $t = 1$ のみにおいて共有点を持つ場合

$t = 0$ において交わるとき、

$$\begin{aligned}g(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow -18a + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、放物線 $y = g(t)$ の軸の方程式 $t = \frac{-6a+7}{13}$ について、

$$\frac{-6a+7}{13} = \frac{-6 \cdot \frac{2}{9} + 7}{13} = \frac{17}{39}$$

であるから、放物線の対称性より、2つのグラフは $t = 0$ と $t = \frac{34}{39}$ の2点において交わっ

てしまい、不適である。また、 $t = 1$ において交わるとき

$$\begin{aligned}g(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -6a + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}g(0) &= -18a + 4 \\ &= -18 \cdot \frac{1}{2} + 4 \\ &= -5\end{aligned}$$

であり、 $g(0) < 0$ が成り立つから、2つのグラフは $t = 1$ のみでしか交わらず、題意を満たす。

以上[1]~[3]より、求めるべき a の範囲は、 $a = \frac{-25+7\sqrt{13}}{12}$ 、 $\frac{2}{9} < a \leq \frac{1}{2}$ である。

(答) $a = \frac{-25+7\sqrt{13}}{12}$ 、 $\frac{2}{9} < a \leq \frac{1}{2}$

(1)

表が初めて出るまでに k 回裏が出るとき、 $1 \sim k$ 回目までは裏が出て、 $k+1$ 回目に表が出るから、その確率 $P_1(k)$ は、

$$P_1(k) = (1-p)^k \cdot p = p(1-p)^k$$

である。また、表が 2 回出るまでに k 回裏が出るとき、 $1 \sim k+1$ 回目のうち 1 回は表、 k 回は裏が出て、 $k+2$ 回目に表が出るから、その確率 $P_2(k)$ は、

$$P_2(k) = {}_{k+1}C_1 p(1-p)^k \cdot p = (k+1)p^2(1-p)^k$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_1(k) = p(1-p)^k, P_2(k) = (k+1)p^2(1-p)^k$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=0}^n kP_1(k) = \sum_{k=0}^n kp(1-p)^k \text{ とおくと,}$$

$$S_n = 1 \cdot p \cdot (1-p)^1 + 2 \cdot p \cdot (1-p)^2 + \cdots + n \cdot p \cdot (1-p)^n \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。①に辺々 $1-p$ をかけると

$$(1-p)S_n = 1 \cdot p \cdot (1-p)^2 + 2 \cdot p \cdot (1-p)^3 + \cdots + n \cdot p \cdot (1-p)^{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①から②を引くと、左辺は pS_n 、右辺は

$$\begin{aligned} & p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots + p(1-p)^n - np(1-p)^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n p(1-p)^k - np(1-p)^{n+1} \\ &= \frac{p(1-p)\{1-(1-p)^n\}}{1-(1-p)} - np(1-p)^{n+1} \\ &= (1-p)\{1-(1-p)^n\} - np(1-p)^{n+1} \\ &= 1-p-(np+1)(1-p)^{n+1} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} pS_n &= 1-p-(np+1)(1-p)^{n+1} \\ \therefore S_n &= \frac{1-p-(np+1)(1-p)^{n+1}}{p} \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

である。よって、 $0 < 1-p < 1$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n kP_1(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-p-(np+1)(1-p)^{n+1}}{p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-p-p(n+1)(1-p)^{n+1} + (p-1)(1-p)^{n+1}}{p} \\ &= \frac{1-p-p \cdot 0 + (p-1) \cdot 0}{p} \\ &= \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1-p}{p}$$

(3)

$$T_n = \sum_{k=0}^n kP_2(k) = \sum_{k=0}^n k(k+1)p^2(1-p)^k \text{ とおくと,}$$

$$T_n = 1 \cdot 2 \cdot p^2(1-p)^1 + 2 \cdot 3 \cdot p^2(1-p)^2 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot p^2(1-p)^n \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。③に辺々 $1-p$ をかけると

$$(1-p)T_n = 1 \cdot 2 \cdot p^2(1-p)^2 + 2 \cdot 3 \cdot p^2(1-p)^3 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot p^2(1-p)^{n+1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。③から④を引くと、左辺は pT_n 、右辺は

$$\begin{aligned} & 2p^2(1-p)^1 + 4p^2(1-p)^2 + \cdots + 2np^2(1-p)^n - n(n+1)p^2(1-p)^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n 2kp^2(1-p)^k - n(n+1)p^2(1-p)^{n+1} \\ &= 2p \sum_{k=0}^n kp(1-p)^k - n(n+1)p^2(1-p)^{n+1} \\ &= 2pS_n - n(n+1)p^2(1-p)^{n+1} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} pT_n &= 2pS_n - n(n+1)p^2(1-p)^{n+1} \\ \therefore T_n &= 2S_n - n(n+1)p(1-p)^{n+1} \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

である。よって、 $0 < 1-p < 1$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n kP_2(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{2S_n - n(n+1)p(1-p)^{n+1}\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{2S_n - p(n+1)^2(1-p)^{n+1} + p(n+1)(1-p)^{n+1}\} \\ &= 2 \cdot \frac{1-p}{p} - p \cdot 0 + p \cdot 0 \\ &= \frac{2(1-p)}{p} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2(1-p)}{p}$$