

〔解答〕

問 1	4
問 2	2
問 3	1
問 4	4
問 5	3

〔解説〕

[1]問 1

$-15 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 15$ より , $-20 \leq x+y \leq 25$ であるから ,

$$0 \leq |x+y| \leq 25$$
 となり , $a=25$ である . $0 \leq |x| \leq 15$, $-5 \leq y \leq 15$ より ,

$$-5 \leq |x|+y \leq 30$$
 となり , $b=30$ である . $-15 \leq x \leq 10$, $0 \leq |y| \leq 15$ より , $-30 \leq x-|y| \leq 10$ であるから ,

$$0 \leq |x-|y|| \leq 30$$
 となる . したがって , $c=30$ である .

問 2

x, y, z は独立に動き , $\frac{|x-|y||}{|z+20|}$ の分子と分母は負でないので , $\frac{|x-|y||}{|z+20|}$ が最大となるのは ,
 $|x-|y||$ が最大値をとり , かつ $|z+20|$ が最小値をとるときである . 問 1 より $|x-|y||$ の最大値は
 30 である . また , $5 \leq z \leq 15$ より , $25 \leq |z+20| \leq 35$ であるから , $|z+20|$ の最小値は 25 である . したがって , $\frac{|x-|y||}{|z+20|}$ の最大値は

$$\frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$
 である .

問 3

$$\frac{-y^2+20y-75}{x^2-10x+35} = \frac{-(y-10)^2+25}{(x-5)^2+10}$$
 である . ここで , $(x-5)^2+10 > 0$ であり , $-(y-10)^2+25$ は正の値を取り得る . x, y は独立に
 動くので , 上の式が最大となるのは , $-(y-10)^2+25$ が最大値をとり , かつ $(x-5)^2+10$ が最小
 値をとるときである . $-5 \leq y \leq 15$ より , $-(y-10)^2+25$ の最大値は 25 である . また , $-15 \leq x$
 ≤ 10 より , $(x-5)^2+10$ の最小値は 10 である . したがって , 求める最大値は

$$\frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$
 である .

[2]問 4

$1 < 3 < 4$ より $1 < \sqrt{3} < 2$ であるから , $[\sqrt{3}] = 1$ である . また , $9 < 12 < 16$ より $3 < 2\sqrt{3} < 4$ である
 から , $[2\sqrt{3}] = 3$ である . よって ,

$$\begin{aligned} \frac{[\sqrt{3}]-\sqrt{3}}{[2\sqrt{3}]+2\sqrt{3}} &= \frac{1-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}-9}{3} \end{aligned}$$
 と求まる .

問 5

$\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] > \left(\frac{a}{5}-1\right) + \left(\frac{a}{3}-1\right)$ であるから $\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] \leq \frac{a}{5}$ ならば , $\left(\frac{a}{5}-1\right) + \left(\frac{a}{3}-1\right) < \frac{a}{5}$ であるこ
 とが必要である . よって ,

$$\left(\frac{a}{5}-1\right) + \left(\frac{a}{3}-1\right) < \frac{a}{5} \Leftrightarrow a < 6$$
 が必要である .
 [i] $a=5$ のとき

$$\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] = 2$$

$$\frac{a}{5} = 1$$
 となり不適である .
 [ii] $a=4$ のとき

$$\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] = 1$$

$$\frac{a}{5} = \frac{4}{5}$$
 となり不適である .
 [iii] $a=3$ のとき

$$\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] = 1$$

$$\frac{a}{5} = \frac{3}{5}$$
 となり不適である .
 [iv] $a=2$ のとき

$$\left[\frac{a}{5}\right] + \left[\frac{a}{3}\right] = 1$$

$$\frac{a}{5} = \frac{2}{5}$$
 となり条件を満たす .
 以上[i]~[iv]より $b=2$ と求まる . 従って ,

$$\begin{aligned} \left[\frac{5b}{3}\right] &= \left[\frac{10}{3}\right] \\ &= 3 \end{aligned}$$
 である .

〔解答〕

問 6	1
問 7	4
問 8	5
問 9	1
問 10	2

〔解説〕

[1]問 6

$$\begin{aligned}
 A &= 5x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 1 \\
 &= (x^2 + 6xy + 9y^2) + (4x^2 - 4x + 1) - 2 \\
 &= (x + 3y)^2 + (2x - 1)^2 - 2
 \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$a = 3, b = -1, c = -2$$

である。

問 7

 $(x + 3y)^2 \geq 0, (2x - 1)^2 \geq 0$ であるから、 A が最小となるのは、 $x + 3y = 0$ かつ $2x - 1 = 0$ とな
るときである。これらを連立すると $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ となる。

[2]問 8

 $f(-5) = f(3)$ であるから、対称性より $y = f(x)$ のグラフの軸は $x = -5, 3$ の中央である。よって軸は、

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-5 + 3}{2} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

となる。

問 9

 問 8 と $f(x)$ の最大値が存在し、その値が 10 であることから、 $y = f(x)$ のグラフの頂点は $(-1, 10)$ となる。ゆえに、 $f(x)$ は

$$f(x) = p(x + 1)^2 + 10$$

と表せる。よって、 $s = 1, t = 10$ である。

問 10

問 9 より $f(x) = p(x + 1)^2 + 10$ と表せ、 $f(3) = 2$ であるから、

$$\begin{aligned}
 p(3 + 1)^2 + 10 &= 2 \\
 \therefore p &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 10 \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{19}{2}
 \end{aligned}$$

であるから、 $q = -1, r = \frac{19}{2}$ と求まる。

〔解答〕

問 11	2
問 12	1
問 13	1
問 14	4
問 15	4

〔解説〕

問 11

X が 5 の倍数となる条件は、 x_4 が 5 の倍数となること、すなわち $x_4 = 5$ となることである。
 x_1, x_2, x_3 の値は何でもよいため、 x_4 が 1, 2, …, 6 の 6 通りのうち 5 である確率を考えて、

$$\frac{1}{6}$$

である。

問 12

全事象は

$$\begin{aligned} {}_6P_4 &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 360 \end{aligned}$$

通りある。 X が 3 の倍数になるとき、 X の各位の数字の和が 3 の倍数になるので 4 つの数字の選び方は

$$(1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 5, 6), (2, 3, 4, 6), (3, 4, 5, 6)$$

の 5 通りあり、そのそれぞれについて並べ方が $4! = 24$ 通りあるので X が 3 の倍数になる場合の数は

$$5 \cdot 24 = 120$$

通りある。従って、求める確率は

$$\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$

である。

問 13

$x_1 > x_2 > x_3 > 2$ より、3 から 6 の数字の中から 3 つ選べば、おのずと x_1, x_2, x_3 は決まる。この選び方は

$${}_4C_3 = 4$$

通りある。このそれぞれの場合に対して、 x_4 を残った 3 つの数字の中から選ぶので、

$x_1 > x_2 > x_3 > 2$ となる場合の数は

$$4 \cdot 3 = 12$$

通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{12}{360} = \frac{1}{30}$$

である。

問 14

$x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ より、1 から 6 の数字の中から 4 つ選べば、おのずと x_1, x_2, x_3, x_4 は決まる。この選び方は

$${}_6C_4 = 15$$

通りある。従って、求める確率は

$$\frac{15}{360} = \frac{1}{24}$$

である。

問 15

$6 \geq x_1 > x_2 > x_3 > x_4 = y_1 < y_2 < y_3 < y_4 \leq 6$ より、 $x_4 = y_1 = 1, 2, 3$ である。

[i] $x_4 = y_1 = 1$ のとき

X について、2 から 6 の数字の中から 3 つ選べば、おのずと x_1, x_2, x_3 は決まる。この選び方は

$${}_5C_3 = 10$$

通りある。 Y についても同様に 10 通りあるので、このときの場合の数は

$$10 \cdot 10 = 100$$

通りである。

[ii] $x_4 = y_1 = 2$ のとき

X について、3 から 6 の数字の中から 3 つ選べば、おのずと x_1, x_2, x_3 は決まる。この選び方は

$${}_4C_3 = 4$$

通りある。 Y についても同様に 4 通りあるので、このときの場合の数は

$$4 \cdot 4 = 16$$

通りである。

[iii] $x_4 = y_1 = 3$ のとき

X について、4 から 6 の数字の中から 3 つ選べば、おのずと x_1, x_2, x_3 は決まる。この選び方は

$${}_3C_3 = 1$$

通りある。 Y についても同様に 1 通りあるので、このときの場合の数は

$$1 \cdot 1 = 1$$

通りである。

以上[i]~[iii]より、 $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 = y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ となる場合の数は

$$100 + 16 + 1 = 117$$

通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{117}{360 \cdot 360} = \frac{13}{14400}$$

である。

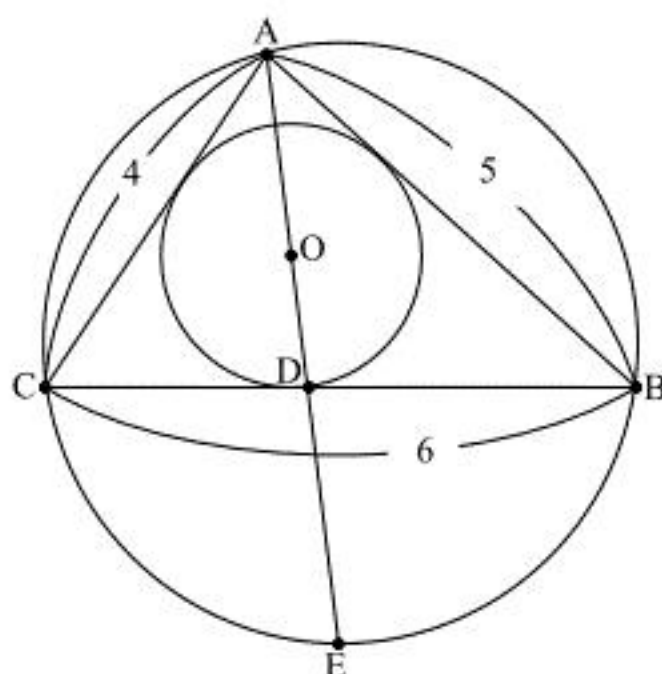
【解答】

問 16	3
問 17	3
問 18	4
問 19	2
問 20	2

【解説】

問 16

△ABC およびその内接円, 外接円, 点 O, D, E は以下の図のようになる。



直線 AD は $\angle BAC$ の二等分線なので、

$$\begin{aligned} BD:DC &= AB:AC \\ &= 5:4 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} BD &= \frac{5}{9}BC \\ &= \frac{5}{9} \cdot 6 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

問 17

余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} \\ &= \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

問 18

ベクトルを用いて考える。点 D は線分 BC を 5:4 に内分する点なので、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$$

と表せる。ゆえに、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= \left| \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC} \right|^2 \\ &= \frac{16}{81}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{40}{81}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{25}{81}|\overrightarrow{AC}|^2 \end{aligned}$$

である。ここで、 $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$ であり、問 17 より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC \\ &= 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= \frac{16}{81} \cdot 5^2 + \frac{40}{81} \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{81} \cdot 4^2 \\ &= \frac{100}{9} \end{aligned}$$

となる。従って、AD の長さは

$$|\overrightarrow{AD}| = \frac{10}{3}$$

と求まる。

問 19

問 17 より

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \quad (\because \sin \angle BAC > 0) \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{8} \end{aligned}$$

となるので、△ABC の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、△ABC の内接円の半径を r とおくと、△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}(4+5+6)r = \frac{15}{2}r$$

と表せる。よって、 r は

$$\begin{aligned} \frac{15\sqrt{7}}{4} &= \frac{15}{2}r \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

問 20

直線 BO は $\angle ABC$ の二等分線なので、

$$\begin{aligned} AO:OD &= BA:BD \\ &= 5:\frac{10}{3} \\ &= 3:2 \end{aligned}$$

より OD は

$$\begin{aligned} OD &= \frac{2}{5}AD \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。ここで、方べきの定理より $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{10}{3} \cdot DE &= \frac{10}{3} \cdot \frac{8}{3} \\ \therefore DE &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} EO &= OD + DE \\ &= \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

と求まる。