

〔解答〕

(4)

〔解説〕

与式を因数分解すると、

$$\begin{aligned}
 2x^2 + x + 9xy + 2xy^2 - 4y^4 + 5y^2 - 1 &= 2x^2 + (2y^2 + 9y + 1)x - (4y^4 - 5y^2 + 1) \\
 &= 2x^2 + (2y^2 + 9y + 1)x - (4y^2 - 1)(y^2 - 1) \\
 &= 2x^2 + (2y^2 + 9y + 1)x - (2y + 1)(2y - 1)(y + 1)(y - 1) \\
 &= 2x^2 + (2y^2 + 9y + 1)x - (2y^2 + 3y + 1)(2y^2 - 3y + 1) \\
 &= \{2x - (2y^2 - 3y + 1)\} \{x + (2y^2 + 3y + 1)\} \\
 &= (2x - 2y^2 + 3y - 1)(x + 2y^2 + 3y + 1)
 \end{aligned}$$

となるから、

$$a + b + c + d + e + f = -2 + 3 - 1 + 2 + 3 + 1 = 6$$

と求まる。

[解答]

(3)

[解説]

 $f(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2a^2x + a^4 + \frac{5}{81} \\ &= (x - a^2)^2 + \frac{5}{81} \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ は点 $\left(a^2, \frac{5}{81}\right)$ を頂点に持つ。以下、 a についての条件で場合分けする。

[1] $a < a^2$ のとき

このとき、 a は正の実数であるから、 $a > 1$ である。 $f(x)$ は区間 $[0, a]$ において $x=a$ のときに最小値をとるから、

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{7}{27} \\ \Leftrightarrow (a - a^2)^2 + \frac{5}{81} &= \frac{7}{27} \\ \Leftrightarrow (a - a^2)^2 - \frac{16}{81} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(a^2 - a + \frac{4}{9}\right)\left(a^2 - a - \frac{4}{9}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{36}\right\} \cdot \frac{1}{9}(3a - 4)(3a + 1) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 a は正の実数であるから、 $a = \frac{4}{3}$ である。これは $a > 1$ を満たす。

[2] $a^2 \leq a$ のとき

このとき、 a は正の実数であるから、 $a \leq 1$ である。 $f(x)$ は区間 $[0, a]$ において $x=a^2$ のときに最小値をとるが、

$$f(a^2) = \frac{5}{81} \neq \frac{7}{27}$$

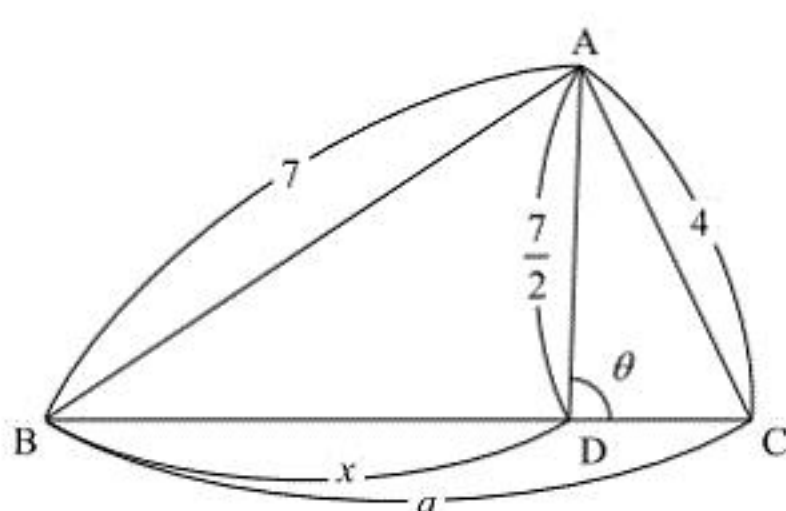
となり、この等式は成り立たないため、不適である。

以上[1], [2]より、 $a = \frac{4}{3}$ である。

〔解答〕

(2)

〔解説〕



上図のように、 $BD=x$, $BC=a$, $\angle ADC=\theta$ とおく。このとき、上図より明らかに $x < a$ である。
 $\triangle ADC$ について余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + (a-x)^2 - 4^2}{2 \cdot \frac{7}{2} \cdot (a-x)} \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{-\frac{15}{4} + (a-x)^2}{7(a-x)} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle ABD$ について余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \theta) &= \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + x^2 - 7^2}{2 \cdot \frac{7}{2} \cdot x} \\ \Leftrightarrow -\cos \theta &= \frac{-\frac{147}{4} + x^2}{7x} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①②式より、

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{15}{4} + (a-x)^2}{7(a-x)} &= -\frac{-\frac{147}{4} + x^2}{7x} \\ \Leftrightarrow -\frac{15}{4}x + x(a-x)^2 &= \frac{147}{4}(a-x) - x^2(a-x) \\ \Leftrightarrow -15x + 4\{(a-x) + x\}x(a-x) - 147a + 147x &= 0 \\ \Leftrightarrow -4ax^2 + 4a^2x + 132x - 147a &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(-ax^2 + a^2x + 33x) - 147a &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となり、 a, x は自然数で、4 と 147 は互いに素であるから、 a は 4 の倍数である。ここで、 $\triangle ABD$ について、

$$\begin{aligned}|AB - AC| &< BC < (AB + AC) \\ \Leftrightarrow |7 - 4| &< a < (7 + 4) \\ \therefore 3 &< a < 11\end{aligned}$$

であるから、 $a=4, 8$ である。 $a=4$ のとき、③より、

$$\begin{aligned}4(-4x^2 + 16x + 33x) - 4 \cdot 147 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 49x + 147 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-7)(4x-21) &= 0\end{aligned}$$

となり、 x は自然数であるから、 $x=7$ である。したがって、 $a < x$ となるから、この場合は不適である。 $a=8$ のとき、③式より、

$$\begin{aligned}4(-8x^2 + 64x + 33x) - 8 \cdot 147 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 97x + 294 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-6)(8x-49) &= 0\end{aligned}$$

となり、 x は自然数であるから、 $x=6$ である。したがって、 $x < a$ となるから、この場合は適する。以上より、 $BD=x=6$ である。

〔解答〕

(5)

〔解説〕

並べてできる整数（以下、「できる整数」と呼ぶ）が9の倍数のとき、できる整数の各桁の和は9の倍数になる。できる整数の各桁の和の最小値は1であり、最大値は、

$$1+3+5+7+9=25$$

であるから、できる整数の各桁の和としてあり得るのは9, 18の2通りである。

[1] できる整数の各桁の和が9のとき

このとき、できる整数を構成する数字の組み合わせとして考えられるのは、

$$(9), (1, 3, 5)$$

の2通りであるから、できる整数として考えられるのは、

$$1+3!=1+6=7 \text{ (個)}$$

である。

[2] できる整数の各桁の和が18のとき

このとき、できる整数を構成する数字の組み合わせとして考えられるのは、

$$(1, 3, 5, 9)$$

の1通りであるから、できる整数として考えられるのは、

$$4!=24 \text{ (個)}$$

である。

[1], [2]より、求めるべき個数は、

$$7+24=31 \text{ (個)}$$

である。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

出た目の最小値が2であるような事象を X 、出た目の最大値が4であるような事象を Y とする。 X が成り立つような確率は、出た目がすべて2~6のいずれかである確率から、出た目がすべて3~6のいずれかである確率を引けばよいから、

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{5^3}{6^3} - \frac{4^3}{6^3} \\ &= \frac{61}{216} \end{aligned}$$

である。また、 X, Y ともに成り立つ場合、出た目の組み合わせは $(2, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4)$ のいずれかであるから、

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= \frac{3 + 3! + 3}{6^3} \\ &= \frac{12}{216} \end{aligned}$$

である。したがって、求めるべき条件付き確率は、

$$\begin{aligned} P_X(Y) &= \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{12}{216}}{\frac{61}{216}} \\ &= \frac{12}{61} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(3)

〔解説〕

$z^3 = 8$ を変形すると,

$$z^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0$$

であり, α は $z^3 = 8$ の虚数解であるから, α は $z^2 + 2z + 4 = 0$ の解であり, $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ が成り立つ。 $\alpha^3 = 8$ であることも考慮すると,

$$\begin{aligned}\alpha^4 + 6\alpha^3 + 8\alpha^2 + 8\alpha &= 8\alpha + 48 + 8\alpha^2 + 8\alpha \\ &= 8\alpha^2 + 16\alpha + 48 \\ &= 8(\alpha^2 + 2\alpha + 4) + 16 \\ &= 16\end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

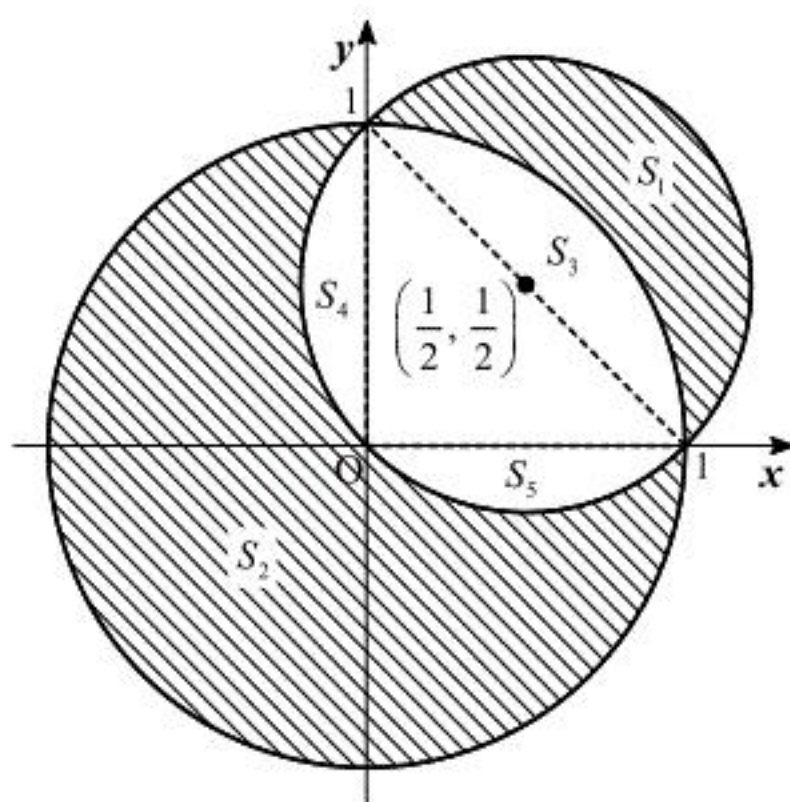
(2)

〔解説〕

不等式 $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - x - y) \leq 0$ を変形すると、

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - x - y) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ かつ } x^2 + y^2 - x - y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ かつ } x^2 + y^2 - x - y \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \text{ かつ } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、与えられた不等式により表される領域は以下の斜線部のようになる。



「 $x^2 + y^2 \geq 1$ かつ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$ 」が表す領域の面積を S_1 とすると、 S_1 は、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の半円の面積から、上図の S_3 を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、「 $x^2 + y^2 \leq 1$ かつ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$ 」が表す領域の面積を S_2 とすると、 S_2

は、半径1、中心角 $\frac{3}{2}\pi$ の扇形の面積から、上図の S_4 、 S_5 を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} S_2 &= \pi \cdot \frac{3}{4} - \left\{ \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。以上より、求めるべき面積は、

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi + 1$$

となる。

【解答】

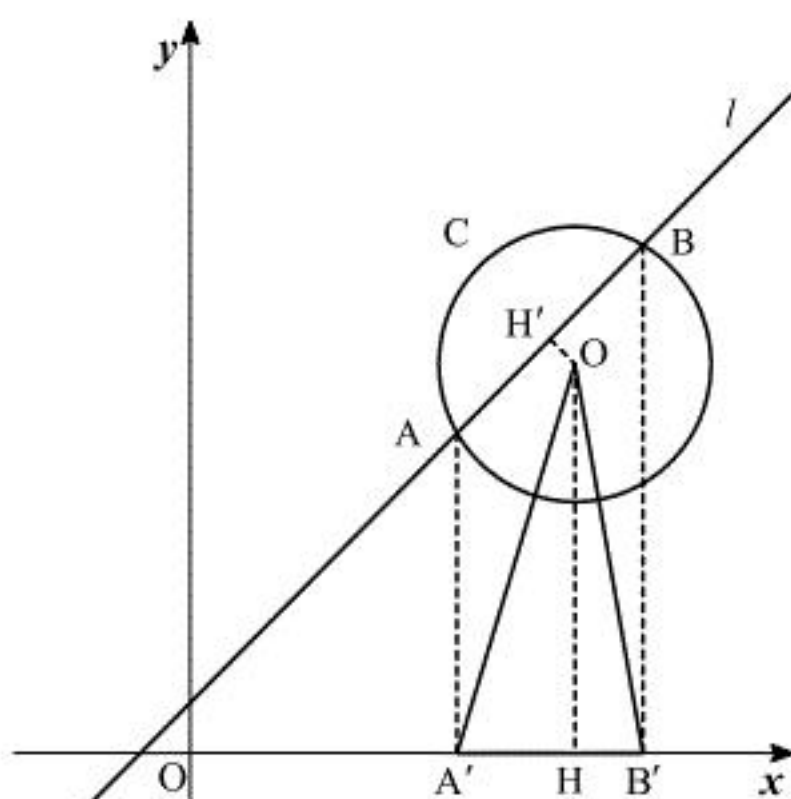
(2)

【解説】

円Cを表す方程式を変形すると,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 8x - 8y + 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 &= (\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

であるから, 円Cは点(4, 4)を中心に持つ, 半径 $\sqrt{2}$ の円であり, 図示すると以下の図のようになる。



上図のように, $H(4, 0)$ とおくと, $\triangle OA'B'$ の面積 S は,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot OH \\ &= \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot 4 \\ &= 2A'B'\end{aligned}$$

となる。ここで, 直線 l の傾きは 1 であるから,

$$\begin{aligned}A'B' &= AB \cos 45^\circ \\ &= \frac{AB}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

である。また, O から直線 l に下ろした垂線の足を H' とすると,

$$\begin{aligned}AB &= 2AH' \\ &= 2\sqrt{OA'^2 - OH'^2} \\ &= 2\sqrt{2 - \left(\frac{|4-4+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2} \\ &= 2\sqrt{2 - \frac{k^2}{2}} \\ &= \sqrt{2(4-k^2)}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}S &> 2 \\ \Leftrightarrow 2A'B' &> 2 \\ \Leftrightarrow A'B' &> 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AB}{\sqrt{2}} &> 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(4-k^2)}}{\sqrt{2}} &> 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2(4-k^2)} &> \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4-k^2} &> 1 \\ \Leftrightarrow 4-k^2 &> 1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{3} < k &< \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\alpha + \beta = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

となる。

〔解答〕

(1)

〔解説〕

 $f(x)$ を変形すると,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right\} - \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

となる。 x は任意の値をとるから、 $f(x)$ の最大値は,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

〔解答〕

(2)

〔解説〕

$m^{\frac{1}{3}n} + m^{-\frac{1}{3}n} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき, $m \geq 1, n > 0$ より $m^{\frac{1}{3}n} \geq m^{-\frac{1}{3}n}$ であるから

$$\begin{aligned} m^{\frac{1}{3}n} - m^{-\frac{1}{3}n} &= \sqrt{\left(m^{\frac{1}{3}n} + m^{-\frac{1}{3}n}\right)^2 - 4} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2} - 4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} m^n - m^{-n} &= \left(m^{\frac{1}{3}n} - m^{-\frac{1}{3}n}\right) \left(m^{\frac{2}{3}n} + m^{\frac{1}{3}n} m^{-\frac{1}{3}n} + m^{-\frac{2}{3}n}\right) \\ &= \left(m^{\frac{1}{3}n} - m^{-\frac{1}{3}n}\right) \left(m^{\frac{2}{3}n} + 1 + m^{-\frac{2}{3}n}\right) \\ &= \left(m^{\frac{1}{3}n} - m^{-\frac{1}{3}n}\right) \left\{\left(m^{\frac{1}{3}n} + m^{-\frac{1}{3}n}\right)^2 - 1\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right\} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(4)

〔解説〕

直線 l_1 は点 $(0, -24)$ を通るから、 $b < 0$ を満たす実数 b を用いて、

$$l_1: y = bx - 24$$

と表すことができる。だから、直線 l_1 と曲線 C_1 の共有点の x 座標について、

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= bx - 24 \\ \Leftrightarrow x^2 - bx + 25 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。直線 l_1 と曲線 C_1 の共有点はただ1つであるから、 x についての方程式①の判別式 D について、 $D = 0$ が成り立てばよい。 $D = 0$ を変形すると、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \pm 10 \end{aligned}$$

となり、 $b < 0$ であるから、 $b = -10$ である。したがって、 l_1 を表す方程式は、 $y = -10x - 24$ である。また、直線 l_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標について、

$$\begin{aligned} -x^2 + 2ax - a^2 - 1 &= -10x - 24 \\ \Leftrightarrow x^2 - (2a + 10)x + a^2 - 23 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。直線 l_1 と曲線 C_2 の共有点はただ1つであるから、 x についての方程式②の判別式 D' について、 $D' = 0$ が成り立てばよい。 $D' = 0$ を変形すると、

$$\begin{aligned} D' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D'}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{-(a+5)\}^2 - 1 \cdot (a^2 - 23) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 10a + 25 - a^2 + 23 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10a + 48 &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{24}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、直線 l_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標について、

$$\begin{aligned} x^2 - (2a + 10)x + a^2 + 23 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{48}{5} + 10\right)x + \left(-\frac{24}{5}\right)^2 + 23 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となるから、直線 l_1 と曲線 C_2 の共有点の y 座標は、

$$y = -10 \cdot \frac{1}{5} - 24 = -26$$

である。以上より、

$$\alpha\beta = \frac{1}{5} \cdot (-26) = -\frac{26}{5}$$

である。

[解答]

(3)

[解説]

$a_1 = \frac{3}{99}, a_2 = \frac{5}{99}, a_3 = \frac{9}{99}, a_4 = \frac{17}{99}, a_5 = \frac{33}{99}$ であるから、自然数 n について、 $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{99}$ が

成り立つと予想できる。この等式を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - \frac{1}{99} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{99} &= 2\left(a_n - \frac{1}{99}\right) \end{aligned}$$

となるから、 a_n の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= \left(a_1 - \frac{1}{99}\right) \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{99} \\ &= \frac{2}{99} \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{99} \\ &= \frac{2^n + 1}{99} \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第10項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2^k + 1}{99} \\ &= \frac{1}{99} \cdot \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + \frac{10}{99} \\ &= \frac{2056}{99} \\ &= 20 + \frac{76}{99} \\ &= 20.\dot{7}\dot{6} \end{aligned}$$

となる。

[解答]

(4)

[解説]

 $f'(x)$ を求めると,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 5\sin^4 x \cos x - 40\cos^4 x \sin x \\
 &= 5\sin x \cos x (\sin^3 x - 8\cos^3 x) \\
 &= 5\sin x \cos x (\sin x - 2\cos x) (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 4\cos x)
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において、 $\sin x > 0$ 、 $\cos x > 0$ 、 $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 4\cos x > 0$ であ

るから、 $f'(x) = 0$ となるのは、

$$\sin x - 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 2$$

となるときである。このときの x がとる値を a とおくと、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	a	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

上の増減表より、

$$\tan a = 2$$

である。

[解答]

(1)

[解説]

与えられた2つの方程式の両辺を t で微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t \\ \frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t \end{cases}$$

となるから、求めるべき曲線の長さを L とすると、

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(-3\sin t + 3\sin 3t)^2 + (3\cos t - 3\cos 3t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9(\sin^2 3t + \cos^2 3t) - 18(\sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t)} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{18 - 18\cos(3t - t)} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{18(1 - \cos 2t)} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{18 \cdot 2\sin^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi |6\sin t| dt \\ &= [-6\cos t]_0^\pi \\ &= -6(-1 - 1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

となる。