

I

(1)

問題文より、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^4 - 1 = f(x)g(x) + 13x^2 - 37 \\ x^2 - x = g(x)h(x) + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = x^4 - 13x^2 + 36 \\ g(x)h(x) = x^2 - x - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9) \\ g(x)h(x) = (x+1)(x-2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \\ g(x)h(x) = (x+1)(x-2) \end{cases} \end{aligned}$$

である。 $g(x)$ は1次の整式だから、0でない実数 a を用いて、

$$g(x) = a(x-2)$$

と表せる。したがって、

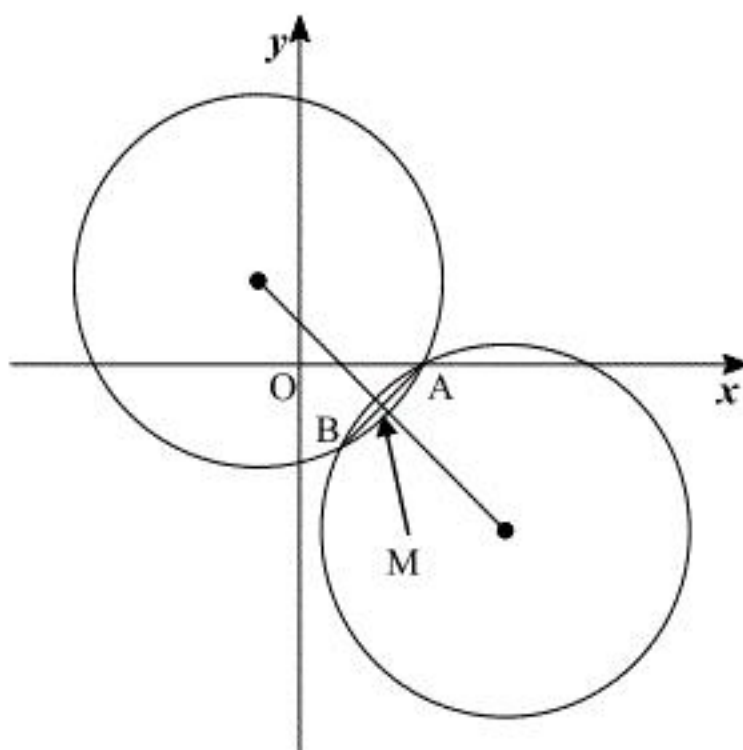
$$f(x) = \frac{1}{a}(x+2)(x+3)(x-3), h(x) = \frac{1}{a}(x+1)$$

となるから、 $f(x) = 0$ の解は、 $x = -3, -2, 3$ となる。

(答) $x = -3, -2, 3$

(2)

線分ABの中点をMとすると、 $M(2, -1)$ である。このとき、2つの円と点A, B, Mは下の図のようになる。



ここで、線分ABは2つの円の中心どうしを結ぶ線分と点Mにおいて直交する。いま、1つの円の中心を O' とすると、 $\overrightarrow{MO'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ が成り立ち、 $\overrightarrow{AB} = (-2, -2)$ であるから、 $\overrightarrow{MO'} = (a, -a)$ とおける。また、

$$MO' = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MO'}| &= 3\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2a^2} &= 3\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a &= \pm 3 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\overrightarrow{MO'} = (\pm 3, \mp 3) \text{ (複合同順)}$$

となる。 $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO'}$ であるから、2つの円の中心の座標はそれぞれ、 $(5, -4), (-1, 2)$ である。

(答) $(5, -4), (-1, 2)$

(3)

$f(x)$ は x^3 の係数が1の3次式であるから、 $f'(x)$ は x^2 の係数が3の2次式である。また、

$f'(t) = f'(t+5)$ であるから、 $f'(x)$ は $x = t + \frac{5}{2}$ を軸に持つ。以上より、実数 d を用いて、

$$f'(x) = 3 \left\{ x - \left(t + \frac{5}{2} \right) \right\}^2 + d$$

と表せる。 $f'(t) = 2$ であるから、

$$\begin{aligned} 3 \left\{ t - \left(t + \frac{5}{2} \right) \right\}^2 + d &= 2 \\ \Leftrightarrow d &= -\frac{67}{4} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \int_t^{t+5} f'(x) dx &= \int_t^{t+5} \left[3 \left\{ x - \left(t + \frac{5}{2} \right) \right\}^2 - \frac{67}{4} \right] dx \\ &= \left[\left\{ x - \left(t + \frac{5}{2} \right) \right\}^3 - \frac{67}{4} x \right]_t^{t+5} \\ &= \left(\frac{5}{2} \right)^3 - \left\{ - \left(\frac{5}{2} \right) \right\}^3 - \frac{67}{4} \cdot 5 \\ &= -\frac{105}{2} \end{aligned}$$

となる。

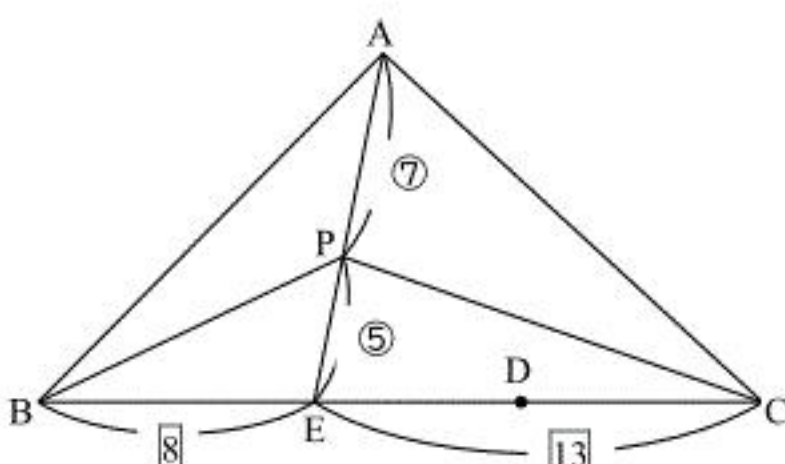
(答) $-\frac{105}{2}$

(4)

点Dは線分BCを2:1に内分するから、 $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} \\ &= \frac{13}{36} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{21}{36} \left(\frac{13}{21} \overrightarrow{AB} + \frac{8}{21} \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{7}{12} \left(\frac{13}{21} \overrightarrow{AB} + \frac{8}{21} \overrightarrow{AC} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、下図のように、線分BCを8:13に内分する点をEとすると、点Pは線分AEを7:5に内分する。



したがって、 $\triangle APC$ の面積を S_1 、 $\triangle ABP$ の面積を S_2 、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{S \cdot \frac{EC}{BC} \cdot \frac{AP}{AE}}{S \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{AP}{AE}} \\ &= \frac{EC}{BE} \\ &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{13}{8}$ 倍

(1)

グループ A に n 枚, グループ B に n 枚, グループ C に n 枚のカードを入れる組み合わせを求めればよいから,

$${}_{3n}C_n \cdot {}_{2n}C_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

通りである。

$$\text{(答)} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \text{通り}$$

(2)

$X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ となるときの i の値を, $i = a, b, c$ ($a < b < c$) とする。また,

$$(X_a, Y_a, Z_a) = (A, A+1, A+2)$$

$$(X_b, Y_b, Z_b) = (B, B+1, B+2)$$

$$(X_c, Y_c, Z_c) = (C, C+1, C+2)$$

とする (A, B, C は自然数で, $1 \leq A, A+2 < B, B+2 < C \leq 10$ を満たす)。このとき,

X_k, Y_k, Z_k ($k = a, b, c$) に含まれない 3 つの数字 D, E, F ($D < E < F$) について,

$$l < A, A+2 < l < B, B+2 < l < C, C+2 < l \quad (l = D, E, F)$$

のいずれか 1 つのみが成り立つ必要がある。したがって, D, E, F は連続する 3 つの自然数となるから,

$$D = 3m-2, E = 3m-1, F = 3m \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

となる。ある自然数 m について, D, E, F がそれぞれどのグループに入るかを考えると, カードの並べ方は

$$3!-1=5$$

通り存在し, m の値は 4 通りであるから, 求めるべき場合の数は,

$$5 \times 4 = 20$$

通りである。

$$\text{(答)} 20 \text{通り}$$

(3)

(X_i, Y_i, Z_i) を 1 つのグループとして考える。以下, $X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ となるような (X_i, Y_i, Z_i) のグループを $\bigcirc$, $X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ とならないような (X_i, Y_i, Z_i) のグループを $\square$ と表記し, (X_1, Y_1, Z_1) のグループから順に左から並べることを考える。題意の条件を満たすとき, (X_i, Y_i, Z_i) となる i がちょうど 2 個あるから, $\bigcirc$ が $n-2$ 個, $\square$ が 2 個となる。

[1] 2 個の $\square$ が隣り合う場合

このとき, $\bigcirc$ と $\square$ の並べ方は, $n-1$ 通り存在する。ここで, 2 個の $\square$ を構成する 6 個の数字の並べ方について考える。この 6 個の数字は,

$$3d+1, 3d+2, 3d+3, 3d+4, 3d+5, 3d+6 \quad (d = 0, 1, 2, \dots, n-2)$$

と表せる。どちらの $\square$ においても $X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ が成り立たないことを気にしないときの 6 個の数字の並べ方の総数は,

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90$$

通りである。また, 少なくとも 1 個の $\square$ において $X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ が成り立ってしまうような 6 個の数字の並べ方の総数は,

$$3 \times 2 - 1 = 11$$

通りであるから, 6 個の数字の正しい並べ方の総数は,

$$90 - 11 = 79$$

通りである。したがって, 2 個の $\square$ が隣り合う場合のカードの並べ方の総数は, $79(n-1)$ 通り存在する。

[2] 2 個の $\square$ が隣り合わない場合

このとき, $\bigcirc$ と $\square$ の並べ方は,

$${}_{n-1}C_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

通り存在する。また, $e+1 < f$ を満たす自然数 e, f ($e = 1, 2, \dots, n-2, f = 3, 4, \dots, n$) について, それぞれの $\square$ を構成する数字は,

$$3e-2, 3e-1, 3e$$

と,

$$3f-2, 3f-1, 3f$$

であるから, $\square$ を構成するカードの並べ方は,

$$(3!-1)^2 = 25$$

通りである。したがって, 2 個の $\square$ が隣り合わない場合のカードの並べ方の総数は,

$$\frac{25}{2}(n-1)(n-2) \text{通り存在する。}$$

以上 [1], [2] より, 求めるべき場合の数は,

$$\begin{aligned} 79(n-1) + \frac{25}{2}(n-1)(n-2) &= (n-1) \left\{ 79 + \frac{25}{2}(n-2) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(25n+108) \end{aligned}$$

通りとなる。

$$\text{(答)} \frac{1}{2}(n-1)(25n+108) \text{通り}$$

(4)

まず, 2 個のマスが連続したものを表す $\blacksquare\blacksquare$ という記号 $n-1$ 個と, 1 個のマスを表す $\square$ という記号 $n+2$ 個を 1 列に並べることを考える。計 $3n$ 個のマスを左から番号をつけ, $\blacksquare\blacksquare$ のうち左側にある数字をグループ A に入れ, 右側にある数字をグループ B に入れるものとする。また, $n+2$ 個の $\square$ に割り振られた数字のうち任意の異なる数字 1 つずつをグループ A, B に入れる。この並べ方は

$${}_{(n-1)+(n+2)}C_{n-1} \cdot (n+2)(n+1) = {}_{2n+1}C_{n-1} \cdot (n+2)(n+1)$$

通り存在するが, これは j が $n-1$ 個ある場合に加えて, j が n 個ある場合をそれぞれ n 重に重複して数えている。ここで, 題意を満たす j が n 個あるような場合の数を求める。そのために, 上記と同様の記号 $\blacksquare\blacksquare$ n 個と, 記号 $\square$ n 個を 1 列に並べることを考える。上記と同様の作業をすると, グループ A, B について題意を満たす j が n 個ある。したがって, 題意を満たす j が n 個あるような場合の数は,

$${}_{n+n}C_n = {}_{2n}C_n$$

通り存在する。以上より, 題意を満たす j がちょうど $n-1$ 個あるような場合の数は,

$$\begin{aligned} {}_{2n+1}C_{n-1} \cdot (n+2)(n+1) - {}_{2n}C_n \cdot n &= \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!} (n+2)(n+1) - {}_{2n}C_n \cdot n \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} n(2n+1) - {}_{2n}C_n \cdot n \\ &= 2n^2 \cdot {}_{2n}C_n \end{aligned}$$

通り存在する。

$$\text{(答)} 2n^2 \cdot {}_{2n}C_n \text{通り}$$

3

(1)

$\log(\sqrt{x^2+3}+x)$ の真数条件より、 $\sqrt{x^2+3}+x>0$ であるが、任意の実数 x について

$$\begin{aligned}x^2+3 &> x^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} &> |x| \geq -x \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}+x &> 0\end{aligned}$$

が成り立つから、 $f(x)$ の定義域は実数全体である。ここで、 $f'(x)$ は、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} + 1}{\sqrt{x^2+3}+x} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\end{aligned}$$

となり、任意の実数 x について、 $f'(x)>0$ であるから、 $f(x)$ は増加関数である。また、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(\sqrt{x^2+3}+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

であり、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log(\sqrt{x^2+3}+x) = \infty$$

であるから、 $f(x)$ の値域は実数全体である。したがって、任意の y について、 $x=f(y)$ を満たす x がただ1つ存在する。 $y=g(x)$ のとき、

$$\begin{aligned}y &= g(x) \\ \Leftrightarrow x &= f(y) \\ \Leftrightarrow x &= \log(\sqrt{y^2+3}+y) \\ \Leftrightarrow \sqrt{y^2+3}+y &= e^x\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2+3}+y &= e^x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y^2+3}+y} &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2+3}-y}{3} &= e^{-x}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2+3}+y-3 \cdot \frac{\sqrt{y^2+3}-y}{3} &= e^x-3e^{-x} \\ \Leftrightarrow 2y &= e^x-3e^{-x} \\ \therefore y &= \frac{e^x-3e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

である。したがって、 $g(x)=\frac{e^x-3e^{-x}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad g(x) = \frac{e^x-3e^{-x}}{2}$$

(2)

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $y=x$ に関して対称であるため、 $x=g(1)$ における $f(x)$ の接線の傾きは $x=1$ における $g(x)$ の接線の傾きの逆数となる。ここで、 $f(g(1))=1$ であることから、関数

$h(x)$ は、

$$\begin{aligned}h(x) &= f'(g(1))(x-g(1))+1 \\ &= \frac{1}{g'(1)}(x-g(1))+1\end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x)=\frac{e^x-3e^{-x}}{2}$ より、 $g(1)=\frac{e-3e^{-1}}{2}$ であり、

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{(e^x-3e^{-x})'}{2} \\ &= \frac{e^x+3e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

より、 $g'(1)=\frac{e+3e^{-1}}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{2}{e+3e^{-1}} \left(x - \frac{e-3e^{-1}}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{2}{e+3e^{-1}} x + \frac{-e+3e^{-1}+e+3e^{-1}}{e+3e^{-1}} \\ &= \frac{2}{e+3e^{-1}} x + \frac{6e^{-1}}{e+3e^{-1}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad h(x) = \frac{2}{e+3e^{-1}} x + \frac{6e^{-1}}{e+3e^{-1}}$$

(3)

$F(x)=h(x)-f(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned}F'(x) &= h'(x)-f'(x) \\ &= \frac{1}{g'(1)}-f'(x) \\ &= \frac{2}{e+3e^{-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\end{aligned}$$

となる。 $F'(x)=0$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{2}{e+3e^{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} &= \frac{e+3e^{-1}}{2} \\ \Leftrightarrow x^2+3 &= \frac{e^2+6+9e^{-2}}{4} \left(\because \frac{e+3e^{-1}}{2} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{e^2-6+9e^{-2}}{4} \\ \therefore x &= \pm \frac{e-3e^{-1}}{2} = \pm g(1)\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}-g(1)-(-1) &= -\frac{e-3e^{-1}}{2}+1 \\ &= \frac{-e+2+3e^{-1}}{2} \\ &= \frac{-(e-3)(e+1)}{2e}\end{aligned}$$

であり、 $2<e<3$ より $e-3<0, e+1>e>0$ であるから、

$$\begin{aligned}-g(1)-(-1) &> 0 \\ \Leftrightarrow -1 &< -g(1)\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}g(1) &= \frac{e-3e^{-1}}{2} \\ &= \frac{e^2-3}{2e} \\ &> \frac{2^2-3}{2e} \quad (2<e) \\ &> 0\end{aligned}$$

であるため、 $-g(1)<g(1)$ である。以上より、 $-1 \leq x \leq g(1)$ における $F(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1		$-g(1)$		$g(1)$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	$F(-1)$	$\nearrow$	$F(-g(1))$	$\searrow$	$F(g(1))$

ここで、

$$\begin{aligned}F(-1) &= h(-1)-f(-1) \\ &= \frac{-2+6e^{-1}}{e+3e^{-1}}-\log 1 \\ &= \frac{-2+6e^{-1}}{e+3e^{-1}} \\ &= \frac{-2e+6}{e^2+3} \\ &= \frac{-2(e-3)}{e^2+3}\end{aligned}$$

であり、 $e-3<0$ であるから、 $F(-1)>0$ である。また、

$$\begin{aligned}F(g(1)) &= h(g(1))-f(g(1)) \\ &= f(g(1))-f(g(1)) \\ &= 0\end{aligned}$$

である。したがって、 $-1 \leq x \leq g(1)$ において、

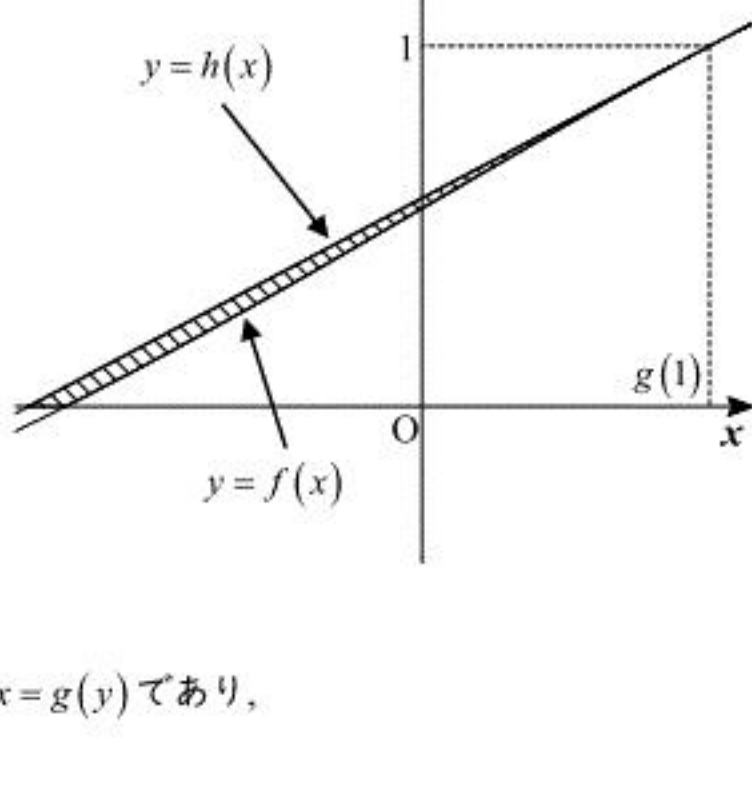
$$\begin{aligned}F(x) &\geq F(g(1))=0 \\ \Leftrightarrow h(x)-f(x) &\geq 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

求めるべき面積 S を図示すると以下の斜線部ようになる。



ここで、 $y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$ であり、

$$\begin{aligned}y &= h(x) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{e+3e^{-1}} x + \frac{6e^{-1}}{e+3e^{-1}} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{e+3e^{-1}} x &= y - \frac{6e^{-1}}{e+3e^{-1}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e+3e^{-1}}{2} y - 3e^{-1}\end{aligned}$$

であるから、面積 S を y 軸方向への積分を利用して求めると、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 \left\{ g(y) - \left(\frac{e+3e^{-1}}{2} y - 3e^{-1} \right) \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^y-3e^{-y}}{2} - \frac{e+3e^{-1}}{2} y + 3e^{-1} \right) dy \\ &= \left[\frac{e^y+3e^{-y}}{2} - \frac{e+3e^{-1}}{4} y^2 + 3e^{-1} y \right]_0^1 \\ &= \frac{e+3e^{-1}}{2} - \frac{e+3e^{-1}}{4} + 3e^{-1} - 2 \\ &= \frac{e+15e^{-1}}{4} - 2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{e+15e^{-1}}{4} - 2$$