

【解答】

問 1	3
問 2	2
問 3	4
問 4	3
問 5	2

【解説】

問 1

$$\begin{cases} 3a+b=ka & \cdots \textcircled{1} \\ a+3b=kb & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

について、 $\textcircled{1}+\textcircled{2}$ より

$$4(a+b)=k(a+b)$$

である。ここで、 $a+b \neq 0$ であるから上の式の両辺を $a+b$ で割って

$$k=4$$

と求まる。

問 2

$$\begin{cases} 3a+5b=10kb \\ a-b=3kb \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{10k-3}{5}a \\ a=(3k+1)b \end{cases}$$

となる。よって、

$$a=(3k+1) \cdot \frac{10k-3}{5}a$$

であり、 $ab \neq 0$ より $a \neq 0$ であるから、

$$(3k+1) \cdot \frac{10k-3}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow 30k^2+k-8=0$$

となる。求める2つの k はこの2解であるから、解と係数の関係より、その積は

$$\frac{-8}{30} = -\frac{4}{15}$$

である。

問 3

1から10までの整数の中で2の倍数は5つある。また、 $2^2(=4)$ の倍数は2つある。さらに、 $2^3(=8)$ の倍数は1つある。ゆえに、 $10!$ は2で最大 $5+2+1=8$ 回割れる。よって、 $10!$ が 2^k で割り切れるような最大の自然数 k は

$$k=8$$

である。

問 4

1から16までの整数の中で2の倍数は8つある。同様に、 $2^2(=4)$ の倍数は4つ、 $2^3(=8)$ の倍数は2つ、 $2^4(=16)$ の倍数は1つある。ゆえに、 $16!$ は2で最大 $8+4+2+1=15$ 回割れる。 $15=2 \times 7+1$ より、 $16!$ は4で最大7回割れる。よって、 $16!$ が 4^k で割り切れるような最大の自然数 k は

$$k=7$$

である。

問 5

問3と同様にして、 $100!$ は2で最大

$$50+25+12+6+3+1=97 \text{ (回)}$$

割れる。よって、 $\frac{100!}{n!}$ が2で最大62回割れるための条件は、 $n!$ が2で最大 $97-62=35$ 回割れることである。

$32!$ が割れる回数は、

$$16+8+4+2+1=31 \text{ (回)}$$

であり。 $34!$ は $31+1=32$ 回、 $36!$ は $32+2=34$ 回、 $38!$ は $34+1=35$ 回、 $40!$ は $35+3=38$ 回となる。よって、 $n!$ が2で最大35回割れる n は38, 39である。ゆえに、求める最大の n は

$$n=39$$

である。

【解答】

問 6	2
問 7	3
問 8	4
問 9	4
問 10	1

【解説】

問 6

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4ax + 3a^2 + 3a + 4 \\ &= (x - 2a)^2 - a^2 + 3a + 4 \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ のグラフは、頂点 $(2a, -a^2 + 3a + 4)$ の下に凸の放物線である。ゆえに、 $f(x)$ の最小値 m は

$$m = -a^2 + 3a + 4$$

である。

問 7

$y = f(x)$ の頂点は $(2a, -a^2 + 3a + 4)$ だから、その x 座標と y 座標が正となるための条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2a > 0 \\ -a^2 + 3a + 4 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-4)(a+1) < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -1 < a < 4 \end{cases} \\ &\therefore 0 < a < 4 \end{aligned}$$

となる。

問 8

$$\begin{aligned} m &= -a^2 + 3a + 4 \\ &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

となるから、 a が実数値をとりながら変化するとき、 m の最小値は $\frac{25}{4}$ である。

問 9

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が異なる 2 点で交わるためには、2 次方程式 $f(x) = g(x)$ が異なる 2 実数解をもつことが必要十分である。ここで、2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 4ax + 3a^2 + 3a + 4 &= -2x + k \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(1-2a)x + 3a^2 + 3a + 4 - k &= 0 \end{aligned}$$

の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (1-2a)^2 - 1 \cdot (3a^2 + 3a + 4 - k) \\ &= a^2 - 7a - 3 + k \end{aligned}$$

である。求める条件は $D > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} a^2 - 7a - 3 + k &> 0 \\ \therefore k &> -a^2 + 7a + 3 \end{aligned}$$

となる。

問 10

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が異なる 2 点で交わるとき、2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 4ax + 3a^2 + 3a + 4 &= -2x + k \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(1-2a)x + 3a^2 + 3a + 4 - k &= 0 \end{aligned}$$

が異なる 2 実数解をもつ。その解を α, β とおくと、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 4a - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。いま、2 交点は $(\alpha, -2\alpha + k), (\beta, -2\beta + k)$ と表せるから、その中点の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{-2(\alpha + \beta) + 2k}{2} \right)$$

と表せる。さらに、 $\textcircled{1}$ より中点の座標は

$$(2a - 1, 2 - 4a + k)$$

となる。ゆえに、中点は k の値に関わらず $x = 2a - 1$ 上にある。

【解答】

問 11	1
問 12	2
問 13	4
問 14	2
問 15	1

【解説】

問 11

甲はAからBまで移動するとき東に5回、北に3回の合計8回移動する。この8回の移動のうち何回目に北に移動するかを選べばよいから、求める場合の数は

$${}_8C_3 = 56 \text{ (通り)}$$

である。

問 12

AからCまでの移動は問 11 と同様に考えて

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

ある。次にCからBまでの移動は1通りである。ゆえに、求める場合の数は

$$4 \cdot 1 = 4 \text{ (通り)}$$

である。

問 13

BからDまでの移動は

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

ある。次にDからAまでの移動は

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

ある。ゆえに、求める場合の数は

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ (通り)}$$

である。

問 14

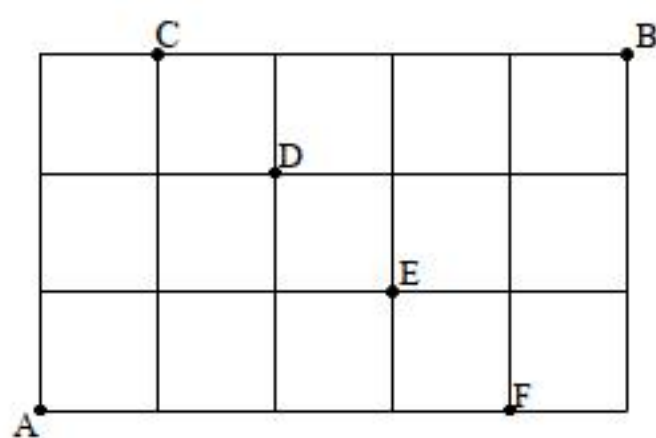
甲がDを通過してBに到達する場合の数は問 13 と同様に 24 通りである。甲および乙が通る 56 通りのルートは同様に確からしいから、甲と乙がDで出会う確率、すなわち甲と乙がともにDを通る確率は

$$\left(\frac{24}{56}\right)^2 = \frac{9}{49}$$

である。

問 15

下図のように、Aから東に3m、北に1m進んだ地点をE、Aから東に4m進んだ地点をFとする。



甲と乙が出会う可能性があるのはC, D, E, Fの4地点である。対称性より、Cで出会う確率とFで出会う確率、Dで出会う確率とEで出会う確率はそれぞれ等しい。

[1] C(F)で出会うとき

問 12 より甲および乙がCを通る場合の数はともに4通りであるからC(F)で出会う確率は

$$\left(\frac{4}{56}\right)^2 = \frac{1}{196}$$

である。

[2] D(E)で出会うとき

問 14 よりD(E)で出会う確率は

$$\frac{9}{49}$$

である。

以上, [1], [2]より求める確率は

$$2 \cdot \frac{1}{196} + 2 \cdot \frac{9}{49} = \frac{37}{98}$$

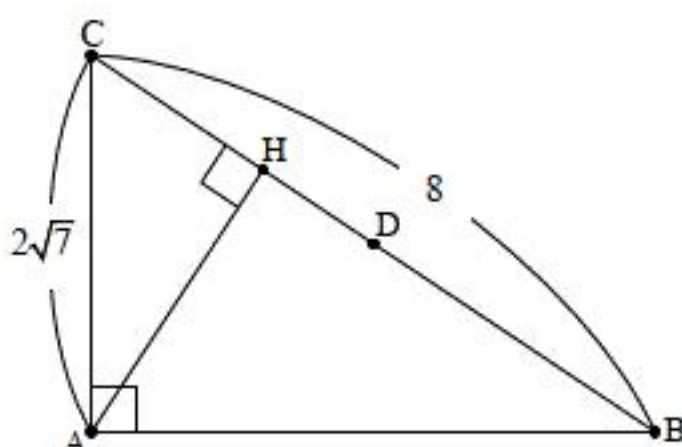
である。

〔解答〕

問 16	5
問 17	3
問 18	3
問 19	2
問 20	2

〔解説〕

三角形 ABC および D, H の概形は以下の図のようになる。



問 16

$\angle BAC = 90^\circ$ より, 点 A は点 D を中心とする半径 $\frac{BC}{2} = 4$ の円上の点であるから,

$$AD = 4$$

である。

問 17

三平方の定理より AB の長さは

$$\sqrt{8^2 - (2\sqrt{7})^2} = 6$$

である。また,

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} AH &= AB \sin \angle ABC \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

となる。

問 18

$$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

であるから,

$$\begin{aligned} BH &= AB \cos \angle ABC \\ &= 6 \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

問 19

①より,

$$\begin{aligned} \cos \angle C &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle ABC \right) \\ &= \sin \angle ABC \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

である。

問 20

求める $\triangle ABD$ の外接円の半径を R とおくと, 正弦定理より

$$\frac{AD}{\sin \angle ABC} = 2R$$

である。問 16 と①と合わせて,

$$\begin{aligned} R &= \frac{AD}{2 \sin \angle ABC} \\ &= \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} \\ &= \frac{8\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

と求まる。