

試験問題(記述式) — 数 学

(注意) 解答はすべて別紙解答用紙の定められた欄に書くこと。

1 以下の問に答えよ。

- (1) 整式 $x^4 - 1$ を 3 次の整式 $f(x)$ で割ると商が $g(x)$ 、余りが $13x^2 - 37$ となった。また、整式 $x^2 - x$ を $g(x)$ で割ると、商が $h(x)$ 、余りが 2 となった。このとき、方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を求めよ。
- (2) 半径が同じである 2 つの円が点 $A(3, 0)$ 、 $B(1, -2)$ を共有し、2 円の中心間の距離が $6\sqrt{2}$ であるとき、2 円の中心の座標はそれぞれいくらか。
- (3) 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が、ある t に対し、 $f'(t) = f'(t+5) = 2$ を満たすとき、 $\int_t^{t+5} f'(x) dx$ はいくらか。ここで、 a 、 b 、 c 、 t は実数である。
- (4) $\triangle ABC$ において辺 BC 上に $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ となる点 D と、 $\triangle ABD$ 内に $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ となる点 P をとる。このとき、 $\triangle APC$ の面積は $\triangle ABP$ の面積の何倍であるか。

2 1 から $3n$ までの自然数がそれぞれ 1 つずつ書かれた $3n$ 枚のカードがある (n は 2 以上の自然数)。この $3n$ 枚のカードを 3 つのグループ A, B, C にそれぞれ n 枚ずつ分けて、各グループ内でカードを数字の小さい順に並べるものとする。グループ A に入る n 枚のカードに書かれた数字を小さい順に、 X_1, X_2, \dots, X_n 、グループ B に入る n 枚のカードに書かれた数字を小さい順に、 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 、グループ C に入る n 枚のカードに書かれた数字を小さい順に、 Z_1, Z_2, \dots, Z_n とする。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) このようなカードの並べ方は何通りあるか。
- (2) $n = 4$ とし、 $X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ となる i ($i = 1, 2, 3, 4$) がちょうど 3 個あるようなカードの並べ方は何通りあるか。
- (3) $X_i + 2 = Y_i + 1 = Z_i$ となる i ($i = 1, 2, \dots, n$) がちょうど $n - 2$ 個あるようなカードの並べ方は何通りあるか。
- (4) 数字の j が書かれたカードがグループ A に、数字の $j + 1$ が書かれたカードがグループ B に含まれるような j ($j = 1, 2, \dots, 3n - 1$) がちょうど $n - 1$ 個あるようなカードの並べ方は何通りあるか。

3 関数 $f(x) = \log(\sqrt{x^2+3}+x)$ について、関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ 、座標平面において曲線 $y=f(x)$ の点 $(g(1), f(g(1)))$ における接線を $y=h(x)$ とする。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) 関数 $g(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $h(x)$ を求めよ。
- (3) $-1 \leq x \leq g(1)$ において、 $h(x) \geq f(x)$ を示せ。
- (4) $y \geq 0$ の領域において、曲線 $y=f(x)$ 、直線 $y=h(x)$ 、 x 軸で囲まれる部分の面積はいくらか。

