

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけない。
2. 監督者から解答を始めるよう合図があったら、まず最初に解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
3. 次に、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を示す表が、この冊子の表紙裏面にあるので、それを確認すること。
4. 解答用紙は、問題冊子とは別に印刷されているから誤りのないように注意すること。
5. 解答用紙は裏面も使うことになっているから注意すること。
6. 各問題とも必ず解答の過程をかき、答は所定の欄に記入すること。
7. この冊子は15頁であるから、落丁、乱丁または印刷の不備なものがあったら申し出ること。
8. 下書き等はこの冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけない。
10. この冊子は持ち帰ってよい。

注 意 志望学部・学科により、以下に示す問題に解答すること。

科 目	学 部 ・ 学 科 等	問 題 番 号
代数・幾何, 基礎解析	文学部・行動科学科 教育学部・小学校教員養成課程 中学校教員養成課程 理科, 技術科, 家庭科専攻 養護学校教員養成課程 幼稚園教員養成課程 法経学部 園芸学部・園芸経済学科	1 , 2 , 3 , 4
代数・幾何, 基礎解析, 確率・統計	理学部・生物学科 工学部Aコース・建築学科, 工学部Bコース・建築学科, 園芸学部・生物生産科学科, 緑地・環境 学科	3 , 4 , 5 , 7
代数・幾何, 基礎解析, 微分・積分, 確率・統計	理学部・物理学科, 化学科, 地球科学科 医学部 薬学部 工学部Aコース(建築学科を除く) 工学部Bコース・機械工学科, 情報工学科, 電気電子工学科	4 , 6 , 8 , 9 , 11
	教育学部・中学校教員養成課程数学科専攻	6 , 7 , 8 , 9 , 12 , 13
	理学部・数学・情報数理学科	8 , 9 , 10 , 11 , 14 , 15

1 $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。このとき

(1) $a_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta = 3(a_n - \alpha n - \beta)$

をみたす定数 α, β を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

2 曲線 $C: y = x^3$ と、 C 上の点 $A(1, 1)$ における接線 l を考える。点 $P(a, a^3)$ を通り、接線 l と直交する直線 g をひき、 l と g の交点を Q とおく。ただし、 a は $-2 \leq a \leq 1$ をみたすものとする。このとき、

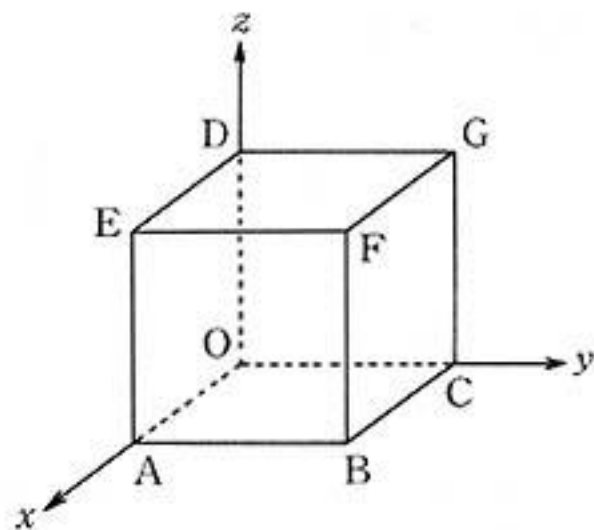
- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。
- (3) (2) で定まる直線 g と接線 l および曲線 C で囲まれる 2 つの図形のうち、線分 PQ の右上側にある部分の面積を求めよ。

3

空間内に、 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$ を頂点にもち、一辺の長さが1の立方体 $DEFG-OABC$ がある。辺 AB , CG , DE 上にそれぞれ

$$AP = CQ = DR = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

となる点 P , Q , R をとる。



- (1) 3点 P , Q , R の座標を t を用いて表せ。
- (2) 3点 P , Q , R を通る平面 α の方程式を求めよ。
- (3) $0 < t < 1$ とし、平面 α と辺 BC , GD との交点をそれぞれ S , T とする。
このとき、四角形 $PSTR$ の面積は t に無関係に一定であることを示せ。

4

xy 平面において、 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を D とし、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \text{ は実数で, } a^2 + b^2 \neq 0)$$

とする。

- (1) 領域 D を行列 A で表される 1 次変換によって領域 D' にうつすとき、 D' の面積 $S(a, b)$ を求めよ。
- (2) $S(a, b) = 31\pi$ となる整数 a, b は存在しないことを示せ。

5 実数 a, b に対して、関数 $f(x)$ は次の3つの条件(1), (2), (3)をみたすものとする。

$$(1) \quad f(x) = a + \int_0^1 (bx^3 - 20xt)f(t)dt,$$

$$(2) \quad \int_0^1 f(t)dt = 1,$$

$$(3) \quad f(x) \text{ は } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ で極値をもつ。}$$

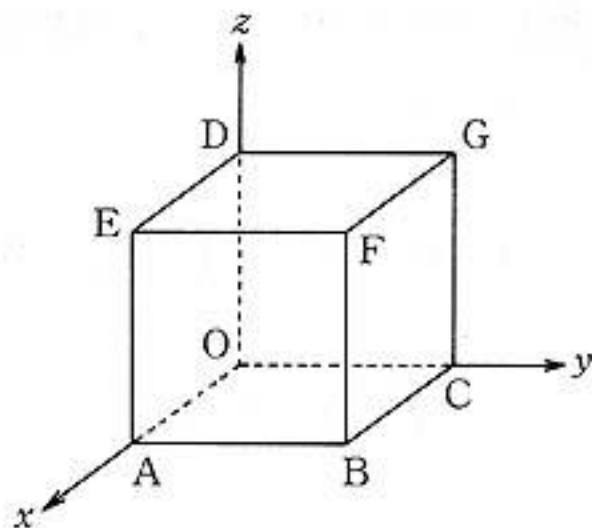
このとき、定数 a, b の値および $f(x)$ を求めよ。

6

空間内に、 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$ を頂点にもち、
 一辺の長さが 1 の立方体 $DEFG-OABC$ がある。辺 AB , CG , DE 上にそれぞれ

$$AP = CQ = DR = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

となる点 P , Q , R をとる。



(1) 3 点 P , Q , R を通る平面 α の方程式を求めよ。

(2) $0 < t < 1$ とし、平面 α と辺 BC , GD との交点をそれぞれ S , T とする。
 このとき、四角形 $PSTR$ の面積は t に無関係に一定であることを示せ。

(3) (2) の四角形 $PSTR$ を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積の最小値を求めよ。

7

4 個のさいころを 1 度に投げる試行をする。このとき、

- (1) 5 以上の目が 2 個以上出る確率を求めよ。
- (2) 4 つの出た目のうち、大きいものから順に 2 つ選んだとき、その和が 10 以上となる確率を求めよ。

8 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 3, a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 5,$
 $a_{10} = a_{11} = \cdots = a_{16} = 7, \dots\dots$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。このとき,

- (1) 自然数 n に対して, $a_k = 2n - 1$ をみたす番号 k のとる値の範囲を求めよ。
- (2) a_{1996} を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ において, 初項から第 n^2 項までのうち, 奇数番目の項全体の和 S を求めよ。

9

微分可能な関数 $f(x)$ は、等式

$$\int_0^x f(t) dt = e^x - 1 + \int_0^x (x - t)f(t) dt$$

をみたすとする。

(1) $f(x) = e^x g(x)$ とおいたとき、 $g(x)$ を求めよ。

(2) 実数 a に対して、方程式 $f(x) = a$ をみたす実数解の個数を求めよ。

平面上の変換 f , g , h をそれぞれ

f は点 $A(1, 0)$ を中心とする $\frac{\pi}{6}$ の回転

g は原点 $O(0, 0)$ を中心とする $\frac{\pi}{3}$ の回転

h は直線 $y = x$ に関する対称移動

とする。

- (1) 変換 f によって、平面上の点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ にうつされるとするとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

をみたす定数 p, q, r, s, t, u を求めよ。

- (2) 合成変換 $g \circ f$ によって動かない点 B の座標を求めよ。

- (3) 合成変換 $h \circ f$ によって、ある傾き m の直線は、同じ傾き m の直線にうつされる。傾き m の値を求めよ。

かたよりのある A , B 2 つのタイプの硬貨を考える。 A タイプの硬貨は表の出る確率が $\frac{1}{100}$, 裏の出る確率が $\frac{99}{100}$ で, B タイプの硬貨は表の出る確率が $\frac{99}{100}$, 裏の出る確率が $\frac{1}{100}$ である。袋の中に, A タイプの硬貨 99 枚, B タイプの硬貨 1 枚が入っている。

- (1) 袋の中から硬貨を 1 枚とって投げたとき, 表の出る確率を求めよ。
- (2) 袋の中から硬貨を 1 枚とって投げたとき, 表が出たものとする。その硬貨をもう一度投げたとき, 表の出る確率を求めよ。
- (3) 袋の中から硬貨を 1 枚とって n 回投げたとき, n 回とも表が出たものとする。その硬貨をもう一度投げたとき, 表の出る確率を求めよ。

12 xy 平面において、 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を D とし、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \text{ は実数で, } a^2 + b^2 \neq 0)$$

とする。

(1) 領域 D を行列 A で表される 1 次変換によって領域 D' にうつすとき、 D' の面積 $S(a, b)$ を求めよ。

(2) $S(a, b) = 31\pi$ となる整数 a, b は存在しないことを示せ。

(3) r を正の偶数とすると、 $S(a, b) = \pi r^2$ となる整数 a, b に対して、

$$2ab \leq r^2 - 4$$

が成り立つことを示せ。

空間内に、原点を中心とし半径 r の上半球

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0$$

がある。いま、平面 $x = t$ ($|t| \leq r$) 上に、正三角形 PQR を考える。頂点 P は x 軸上にあり、2 頂点 Q, R は S 上にあつて、辺 QR が y 軸に平行であるという。

- (1) 三角形 PQR の面積を t を用いて表せ。
- (2) 頂点 P が S の直径上を動くとき、三角形 PQR が動いてできる立体の体積を求めよ。

xyz 空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 0, 1)$ に対して、動点 $P(x, y, z)$ を

$$\overrightarrow{OP} = l \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{OB} + n \overrightarrow{OC} \quad (l, m, n \text{ は実数})$$

で定める。

- (1) l, m, n が $l - m + 2n = 1$ をみたすとき、点 P のえがく図形を表す式を求めよ。
- (2) l, m, n が $l + m + n = 1$, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $n \geq 0$ をみたすとき、点 P のえがく図形の面積 S を求めよ。
- (3) l, m, n が $l + m + n \leq 3$, $l \geq m \geq n \geq 0$ をみたすとき、点 P のえがく図形の体積 V を求めよ。

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |t - x| \sin t dt$$

とする。このとき、

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。