

1 x の関数

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)\log x + 1 & (x > 1 \text{ のとき}) \\ bx + p & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ x\sqrt{x^2+1} + p & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

は、すべての点で連続であり、条件

$$(*) \cdots \int_{-\sqrt{3}}^e f(x) dx = -\frac{31}{12} + \frac{e^2}{4} + 2e + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)p$$

を満たすとする。ただし、 a , b , p は定数とする。

(1) 関数 $f(x)$ が $x = 1$ で連続であることから、 b と p の満たす関係式を求めよ。

(2) 次の 3 つの積分

$$I_1 = \int_{-\sqrt{3}}^0 f(x) dx, \quad I_2 = \int_0^1 f(x) dx, \quad I_3 = \int_1^e f(x) dx$$

を a と p を用いて表せ。

(3) 条件 $(*)$ より、 a の値を求めよ。

(4) 関数 $f(x)$ は $p = -e$ のとき $x = 1$ で微分できることを説明し、その微分係数を求めよ。

(5) 関数 $f(x)$ は $p = -e$ のとき $x = 0$ で微分できるかどうかを判定し、微分できるときはその微分係数を求め、微分できないときはその理由を述べよ。

2 α を実数とする。2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が

$$x_1 = 2, y_1 = 0, x_{n+1} = 1 - \alpha y_n, y_{n+1} = \alpha(x_n - 1)$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $n \geq 1$ のとき

$$x_{2n-1} = 1 + (-1)^{n-1} \alpha^{2(n-1)}, y_{2n-1} = 0$$

であることを示せ。

(2) $|\alpha| < 1$ であるとき $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ。

3 a 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $A^2 - 2A$ を計算せよ。

(2) $A^3 = a_3A + b_3E$ を満たす整数 a_3, b_3 を求めよ。

(3) 任意の自然数 n に対し

$$A^n = a_nA + b_nE$$

を満たす整数 a_n, b_n を n を用いて表せ。

3 b 2 次方程式 $x^2 - 2 = 0$ の正の解 $\sqrt{2}$ の有理数による近似値を 2 分法で求めるために次のように数列 $\{a_n\}$ を定義する。

$a_1 = 1$ とする。

自然数 n に対し a_n から a_{n+1} を

$$a_n^2 \geq 2 \text{ ならば } a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^n}$$

$$a_n^2 < 2 \text{ ならば } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$$

によって定める。

(1) a_8 の値を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対し、不等式

$$|a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

が成立することを証明せよ。