

1 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。このとき、 n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

(2) 3つの自然数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。このとき、 a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

2 実数 a に対して

$$f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$$

とおく。

(1) 定積分

$$I(a) = \int_1^2 f(x) dx$$

を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲を動くとき、 $I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

3 a, b を整数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ が, $0 < x < 2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき, a, b の値を求めよ。

4 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は実数) に対して, 実数 $f(A)$ を $f(A) = a + d$ と定義する。これについて性質

$$f(A \pm B) = f(A) \pm f(B) \quad (\text{複号同順})$$

は証明なしで使ってよい。

- (1) 2次正方行列 A, B に対して, $f(AB) = f(BA)$ を証明せよ。
- (2) 2次正方行列 P, Q が $P = PQ - QP$ を満たしているとする。このとき, $f(P) = 0$ を証明せよ。
- (3) (2) の P に対して, $f(P^2) = 0$ を証明せよ。
- (4) (2) の P に対して, $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を証明せよ。

- 5 C は、2 次関数 $y = x^2$ のグラフを平行移動した放物線で、頂点が円 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき、 C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

6 a, b を実数, e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x \geq ax + b$ が成立するとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax - b) dx$$

の最小値と, そのときの a, b の値を求めよ。

7 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を次のように定義する。

$$a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

8 30 の階乗 $30!$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 2^k が $30!$ を割り切るような最大の自然数 k を求めよ。
- (2) $30!$ の一の位は 0 である。ここから始めて十の位、百の位と順に左に見ていく。最初に 0 でない数字が現れるまでに、連続していくつの 0 が並ぶかを答えよ。
- (3) (2) において、最初に現れる 0 でない数字は何であることを理由とともに答えよ。

9 - **[ア]** i を虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

(1) a を実数の定数とする。条件

$$1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$$

を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき、 a の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数 α に対して、3 点 $0, 1, \alpha$ を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき、 β を α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) α, β を (2) の複素数とする。点 α が (1) の直線上を動くとき、 $\frac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。

9 - **イ** 正の整数 x と y が与えられたとき、以下の手順による計算を行う。

1. $n \leftarrow x, \quad m \leftarrow y, \quad q \leftarrow 0$

2. $m > 0$ かつ $q \leq 2$ を満たしている限り、次の計算を繰り返し実行する。ただし、 n を m で割った商を $n \text{ div } m$, 余りを $n \text{ mod } m$ で表す。

2-1. $q \leftarrow n \text{ div } m, \quad r \leftarrow n \text{ mod } m$

2-2. $n \leftarrow m, \quad m \leftarrow r$

3. $q > 2$ ならば 0 を、そうでなければ n の値を出力する。

この手順に関して、以下の問いに答えよ。

(1) x を 95, y を 35 としたとき、手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での変数 n, m, q の値の変化を示す表を作成し、手順 3 で出力される数を示せ。

(2) 変数 n, m の値をそれぞれ x_2, x_1 とし、その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ、変数 m, q の値がそれぞれ x_0, z になったとする。このとき、 x_2 を x_1, x_0, z を使って表せ。

(3) x と y の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような x と y を 1 組あげ、その組について (1) と同様の表を作成せよ。

10 - **[ア]** i を虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

(1) a を実数の定数とする。条件

$$1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$$

を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき、 a の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数 α に対して、3点 $0, 1, \alpha$ を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき、 β を α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) α, β を (2) の複素数とする。点 α が (1) の直線上を動くとき、 $\frac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。

10 - **イ** 正の整数 x と y が与えられたとき、以下の手順による計算を行う。

1. $n \leftarrow x, \quad m \leftarrow y, \quad q \leftarrow 0$

2. $m > 0$ かつ $q \leq 2$ を満たしている限り、次の計算を繰り返し実行する。ただし、 n を m で割った商を $n \text{ div } m$ 、余りを $n \text{ mod } m$ で表す。

2-1. $q \leftarrow n \text{ div } m, \quad r \leftarrow n \text{ mod } m$

2-2. $n \leftarrow m, \quad m \leftarrow r$

3. $q > 2$ ならば 0 を、そうでなければ n の値を出力する。

この手順に関して、以下の問いに答えよ。

(1) x を 95, y を 35 としたとき、手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での変数 n, m, q の値の変化を示す表を作成し、手順 3 で出力される数を示せ。

(2) 変数 n, m の値をそれぞれ x_2, x_1 とし、その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ、変数 m, q の値がそれぞれ x_0, z になったとする。このとき、 x_2 を x_1, x_0, z を使って表せ。

(3) x と y の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような x と y を 1 組あげ、その組について (1) と同様の表を作成せよ。

10 - **ウ** 2つの野球チーム A, B が繰り返し試合を行う。各試合において, A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を $q = 1 - p$ とする。ただし $0 < p < 1$ とする。

- (1) $p = \frac{1}{2}$ とする。A, B どちらかが4勝するまでに行う試合数を表す確率変数を X とする。 X の確率分布を求めよ。
- (2) B より先に A が n 勝する確率を $P(n)$ とする。 $P(3)$ と $P(4)$ の大小を比較せよ。